NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 41 43 39 30

EKSAMEN I FAG

SIF 4012 ELEKTROMAGNETISME
(SIF 4012 FYSIKK 2)

Onsdag 11. desember 2002

kl. 0900-1400

Bokmål

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU

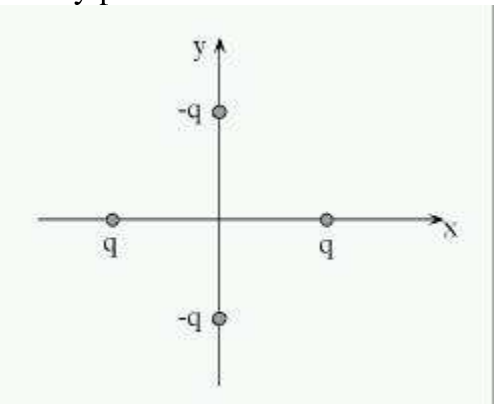
Side 2 – 6: Oppgave 1 – 6.
Vedlegg 1 – 3: Formelsamling.

Eksamen består av 10 deloppgaver (1, 2, 3, 4a, 4b, 4c, 5a, 5b, 6a, 6b) som alle teller like mye under bedømmelsen.
Vektorstørrelser er angitt med **fete** typer i oppgaveteksten, eventuelt med en pil over symbolet i enkelte ligninger og uttrykk.
Dersom intet annet er oppgitt, kan det antas at det omgivende mediet er vakuum (evt luft), med permittivitet $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m og permeabilitet $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

Sensuren kan ventes ca 6. januar 2003.

OPPGAVE 1

Fire punktladninger er plassert i xy-planet:



To har positiv ladning q og ligger på x-aksen i henholdvis x = a og x = –a, og to har negativ ladning –q og ligger på y-aksen i henholdsvis y = a og y = –a. Skisser feltlinjer (i xy-planet) for det elektriske feltet **E**. Bestem potensialet V(x) og det elektriske feltet **E**(x) på x-aksen (du kan anta x > a). Langt ute på den positive x-aksen, dvs for x >> a, kan vi tilnærmet skrive

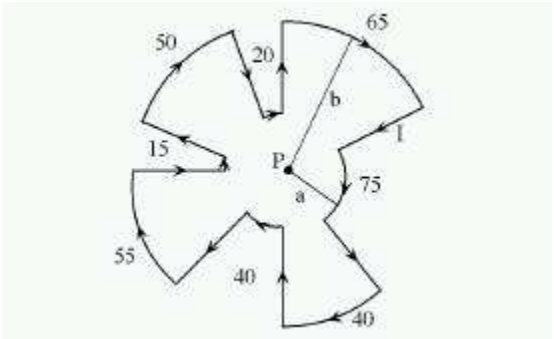
$$\mathbf{E} = \frac{k}{4\pi\varepsilon_0 x^n}\hat{x} \qquad (\hat{x} \text{ er enhetsvektor i x-retning})$$

Vis dette og bestem konstanten *k* og eksponenten *n*.

Oppgitt: $\mathbf{E} = -\nabla V$ $\qquad (1+u)^{-p} = 1 - p\,u + \tfrac{1}{2}\,p\,(p+1)\,u^2 \ldots \quad (|u| < 1)$

Potensial fra punktladning: $V(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

OPPGAVE 2



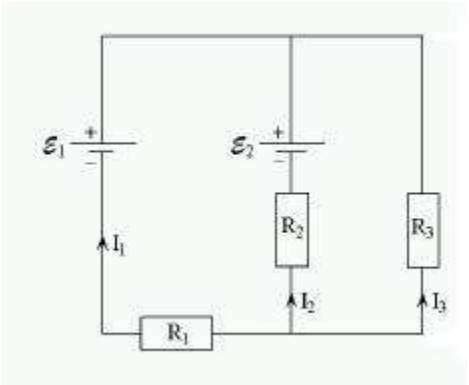
En tynn strømførende leder danner ei lukket sløyfe som ligger delvis langs periferien til to konsentriske sirkler med radius henholdsvis a og b (b > a) og delvis langs radielt rettede forbindelseslinjer mellom de to periferiene, se figuren over. Sløyfa fører en strøm I. I figuren er det angitt hvor mange grader de åtte sirkelbuene spenner over. Punktet P ligger i sentrum av de to sirklene. Bestem magnetfeltet **B** (størrelse og retning) i punktet P.

Oppgitt: På symmetriaksen til ei sirkulær strømsløyfe (strømstyrke I) med radius L er størrelsen på magnetfeltet $B = \dfrac{\mu_0 I L^2}{2\left(L^2 + d^2\right)^{3/2}}$ i en avstand d fra strømsløyfas sentrum.

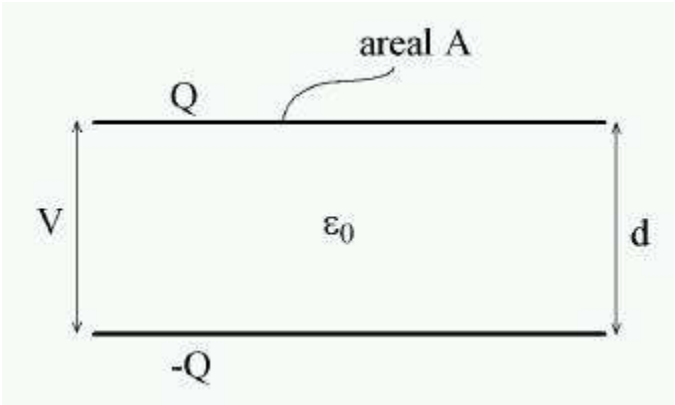
Magnetfelt d**B** fra strømelement I d**l**: $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\dfrac{d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$

OPPGAVE 3

Bestem strømstyrkene I_j (j = 1, 2, 3) for følgende likestrømkrets med motstander $R_j = j\ \Omega$ (j = 1, 2, 3) og ideelle spenningskilder $E_j = j$ V (j = 1, 2):



OPPGAVE 4



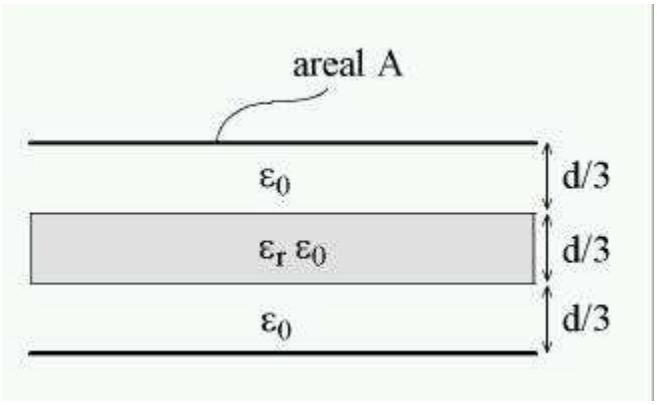
a) Vis at kapasitansen $C_0 = Q/V$ til en luftfylt parallellplatekondensator (permittivitet ε_0) med plateareal A og avstand d mellom lederplatene er

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

når vi antar at det elektriske feltet er homogent i hele området mellom platene. Anta at platenes lineære utstrekning er mye større enn plateavstanden d.

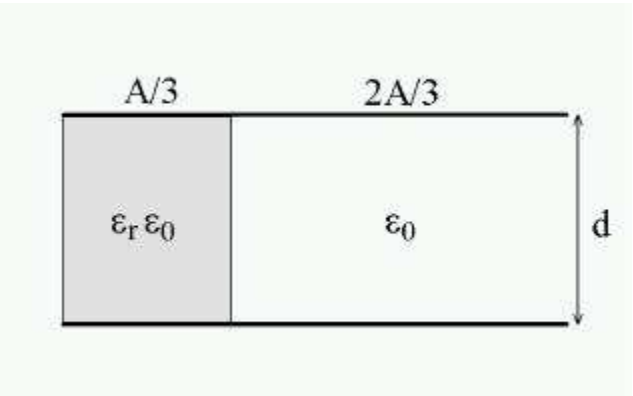
Oppgitt: Elektrisk felt fra uendelig stor flate med ladningstetthet σ er: $\sigma/2\varepsilon_0$

b) Du har et stykke dielektrisk materiale tilgjengelig, med volum Ad/3 og permittivitet $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ (dvs relativ permittivitet ε_r). Hva blir kapasitansen C_1 til kondensatoren dersom ditt dielektrikum har areal A og tykkelse d/3, og plasseres midt mellom platene som vist i følgende figur:



Med en potensialforskjell V mellom lederplatene blir det elektriske feltet E_2 inne i dielektrikumet forskjellig fra feltet E_1 i de to luftfylte sjiktene. Forklar kort hvorfor. Hvor er feltet størst? Hva blir forholdet mellom indusert (”bundet”) overflateladning på dielektrikumet, σ_b, og ”fri” flateladning på lederplatene, σ_f, uttrykt ved ε_r?

c) Dersom du i stedet former ditt dielektrikum til en bit med areal A/3 og tykkelse d, og plasserer det mellom platene på følgende måte,



blir kapasitansen C_2 ”betydelig større” enn C_1 dersom vi har valgt et dielektrikum med ε_r ”betydelig større” enn 1. Underbygg denne påstanden ved å regne ut C_2. (Alternativt: Gi en kvalitativ begrunnelse i grensen $\varepsilon_r >> 1$.) (Faktisk er $C_2 > C_1$ for alle verdier av $\varepsilon_r > 1$.)

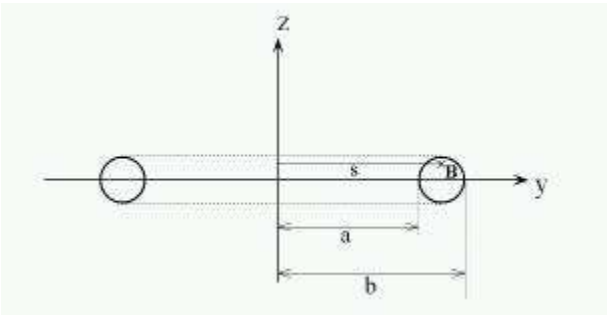
Oppgitt: $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon\mathbf{E} = \varepsilon_r\,\varepsilon_0\,\mathbf{E}$

Tips: Kapasitansene C_1 og C_2 kan betraktes som seriekobling eller parallellkobling av flere kapasitanser. Avgjør selv typen kobling (serie eller parallell) og hva ”flere” står for i hvert enkelt tilfelle.

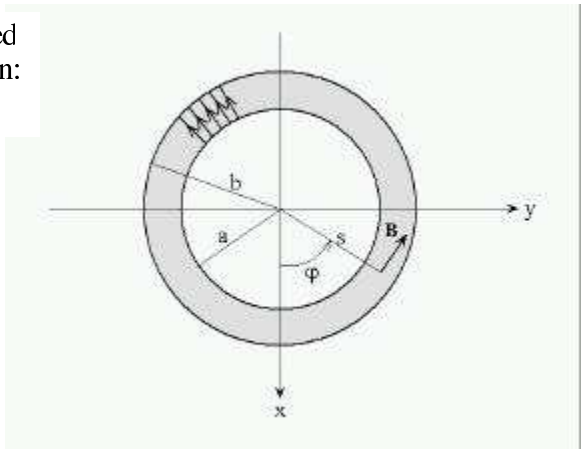
OPPGAVE 5

En luftfylt toroide, dvs en "smultringformet" spole, er jevnt og tett viklet med N viklinger av en spoletråd. Toroiden har indre radius a og ytre radius b. I figuren til høyre er bare fem av viklingene tegnet inn. I spoletråden går en strøm I_0. Retningen på magnetfeltet **B** er da tangentiell til en sirkel med sentrum på toroidens akse (z-aksen), dvs i sylinderkoordinater (s, φ, z) (se figuren): **B** = (0, B, 0). Her er s avstanden fra z-aksen, mens φ er vinkelen mellom x-aksen og s. (I figuren til venstre er altså $\varphi = \pi/2$.)

Snitt gjennom toroiden i yz-planet:

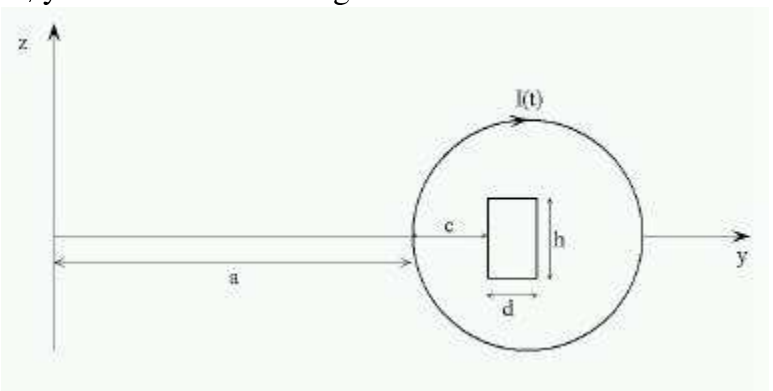


Toroiden sett ned langs z-aksen:



a) Bruk Amperes lov til å vise at $B = kI_0/s$ inne i toroiden. Bestem k. Hva blir B utenfor toroiden (dvs når $s < a$, $s > b$ eller $|z| > (b-a)/2$)?

b) Inne i toroiden, i yz-planet og i en avstand c fra toroidens innerkant, er det plassert en rektangulær ledersløyfe med sidekanter d og h:



Bestem den gjensidige induktansen M mellom toroiden og den rektangulære lederen. Bestem videre indusert elektromotorisk spenning $\mathcal{E}$ i den rektangulære lederen når strømmen I(t) i spoletråden skrus på ved tiden t = 0 og varierer med tiden på følgende måte:

$$I(t) = \begin{cases} \alpha\, t\, I_0 & 0 < t < \dfrac{1}{\alpha} \\ I_0 & t \geq \dfrac{1}{\alpha} \end{cases}$$

Angi retningen på $\mathcal{E}$.

Oppgitt: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ $\qquad \Phi = M\, I$ $\qquad \int \dfrac{dy}{y} = \ln y$ $\qquad \mathcal{E} = -\, d\Phi/dt$

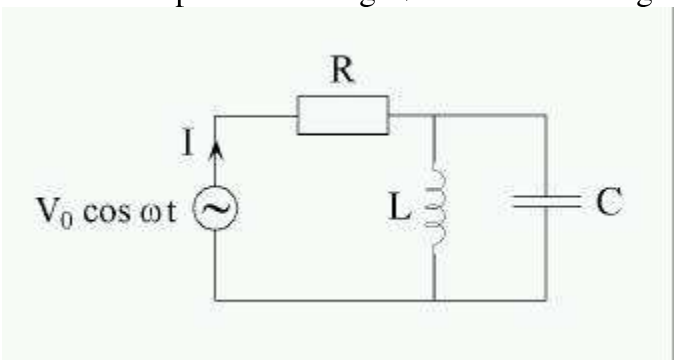
OPPGAVE 6

a) Hva er impedansen Z = V/I for

i. en motstand 1 Ω,
ii. en kapasitans 100 μF,
iii. en induktans 100 μH

når spenning V og strøm I varierer harmonisk med tiden, med vinkelfrekvens $\omega = 1000\ s^{-1}$? Angi både absoluttverdi |Z| og fasevinkel α i hvert enkelt tilfelle. ($Z = |Z| \exp(i\alpha)$)

b) Vekselstrømkretsen i figuren nedenfor, med vekselspenningskilde $V = V_0 \cos \omega t$, består av en motstand R seriekoblet med en parallellkobling av en induktans L og en kapasitans C:



Kretsens totale impedans $Z_0 = V/I$ kan skrives på kompleks form $Z_0 = |Z_0| \exp(i\alpha_0)$, med absoluttverdi

$$|Z_0| = R\left[1+\left(\frac{\omega/\omega_1}{1-\omega^2/\omega_0^2}\right)^2\right]^{1/2}$$

og fasevinkel

$$\alpha_0 = \arctan\left(\frac{\omega/\omega_1}{1-\omega^2/\omega_0^2}\right)$$

Vis dette og bestem de "karakteristiske" vinkelfrekvensene ω_0 og ω_1 (uttrykt ved R, L og C). Skisser amplituden I_0 til strømmen I som funksjon av ω (f.eks. opp til $\omega = 4\ \omega_0$) når $\omega_0 = \omega_1$. Bestem tallverdi for ω_0 og ω_1 dersom R, L og C har verdier som gitt under punkt a).

Oppgitt:

Seriekobling av komplekse impedanser: $Z = \sum_i Z_i$

Parallellkobling av komplekse impedanser: $Z^{-1} = \sum_i Z_i^{-1}$

Betydningen av absoluttverdi og fasevinkel til impedansen er som følger:
Dersom en vekselspenningskilde $V = V_0 \cos \omega t$ resulterer i en vekselstrøm $I = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$, har kretsen en impedans med absoluttverdi $|Z| = V_0/I_0$ og fasevinkel α.

Spenningsfall over motstand: RI
kapasitans: Q/C
induktans: LdI/dt

(retningen på spenningsfallene må du vurdere selv)