

Løsning øving 10

Oppgave 1

Av symmetri grunner må magnetfeltet ha retning langs spolens akse, som vist i figuren.

Strøm i element dx : $dI = I n dx$

Bidrag til $\mathbf{B}$:

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dI$$

Magnetfeltet blir dermed:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I n}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{R^2 dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Et lignende integral var vi borti i Øving 2, oppgave 4a. Vi setter

$$x = R \tan j \Rightarrow dx = \frac{R}{\cos^2 j} dj$$

$$\sqrt{x^2 + R^2} = \frac{R}{\cos j}$$

og får

$$B = \frac{\mu_0 I n}{2} \int_{j_1}^{j_2} \cos j dj = \frac{1}{2} \mu_0 I n (\sin j_2 - \sin j_1)$$

Når $L \rightarrow \infty$, vil $\phi_2 \rightarrow \pi/2$ og $\phi_1 \rightarrow -\pi/2$, slik at $B \rightarrow \mu_0 n I$, dvs det samme som vi fant i forelesningene ved å benytte Amperes lov.

Oppgave 2.

Inne i en lang spole er magnetfeltet $B = \mu_0 I n$. For å lage $B=1\text{T}$ med viklingstetthet 1000 m^{-1} , må vi derfor ha en strømstyrke på

$$I = B/(\mu_0 n) = 1/(4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000) \text{ A} = \underline{796 \text{ A}}$$

I et lederstykke med motstand R som fører en strøm I har vi et effekttap gitt ved

$$P = RI^2 \quad (P = VI = RI I = RI^2)$$

Motstanden R er gitt ved

$$R = L/(\sigma S)$$

i en leder med lengde L , tverrsnittsareal S og konduktivitet σ . Her har vi $S = \pi (d/2)^2 = 0.79 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$, slik at med oppgitt verdi for σ , har tråden en motstand pr lengdeenhet

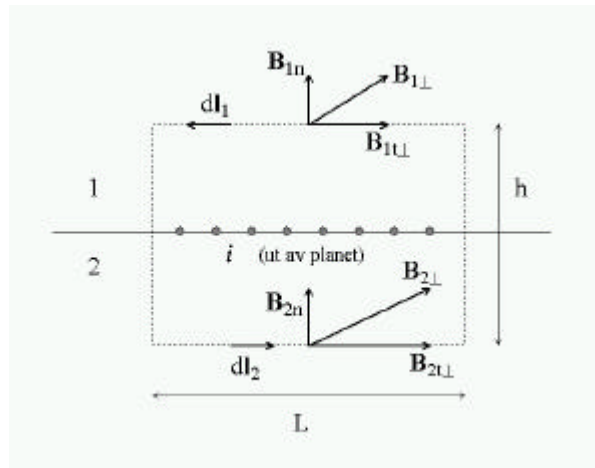
$$R/L = 1/(\sigma S) = 0.022 \Omega/\text{m}.$$

Utviklet effekt pr lengdeenhet blir dermed:

$$P/L = (R/L)I^2 = 0.022 \cdot 796^2 \text{ W/m} = \underline{13.9 \text{ kW/m}}$$

Dette er ikke så rent lite, og gjør det vanskelig å lage sterke magnetfelt med en slik spole. Det hjelper endel å fylle spolen med jern: Da kan vi i hvert fall oppnå et magnetfelt $B_s = \mu_0 M_s$, der M_s er metningsmagnetiseringen i jern. Med $M_s = 1.6 \cdot 10^6 \text{ A/m}$ får vi $B_s = 2\text{T}$. Men en ytterligere økning til 3T krever altså en påtrykt strømstyrke på ca 800A hvis $n=1000 \text{ m}^{-1}$. (Husk at totalt magnetfelt blir $B = \mu_0 (H + M_s)$, der $\mu_0 H = nI$ skyldes påtrykt, "fri" strøm I .)

Oppgave 3.



Vi ser først på komponenten B_t tangentielt med grenseflaten, og la oss starte med den komponenten av B som står vinkelrett på retningen til overflatestrømmen, nemlig $B_{\perp}$.

Amperes lov sier at kurveintegralet av $\mathbf{B}$ rundt en lukket kurve skal være lik μ_0 multiplisert med strømmen som omslutes av den lukkede kurven. Her er vi kun interessert i hva $\mathbf{B}$ er *like over* og *like under* grenseflaten som skiller områdene 1 og 2. Vi kan altså la "høyden" h gå mot null, men da får vi også null bidrag til kurveintegralet fra de to vertikale bitene av det stiplede rektangelet. Bidraget fra den horisontale biten i område 2 blir $B_{2\perp}L$, ettersom $\mathbf{B}_{2\perp}$ peker samme vei som veielementet $d\mathbf{l}_2$. Bidraget fra den horisontale biten i område 1 blir $-B_{1\perp}L$, ettersom $\mathbf{B}_{1\perp}$ her peker motsatt vei av veielementet $d\mathbf{l}_1$. Dermed gir Amperes lov:

$$B_{2\perp}L - B_{1\perp}L = \mu_0 I = \mu_0 iL$$

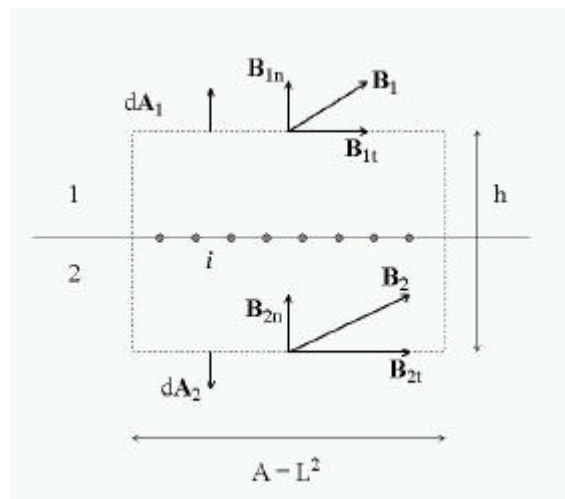
$$B_{2\perp} - B_{1\perp} = \mu_0 i$$

Med andre ord: Komponentene av $\mathbf{B}$ som er tangentiell med grenseflaten og samtidig normal til overflatestrømmen $\mathbf{i}$ er diskontinuerlig når vi krysser en grenseflate med overflatestrøm $\mathbf{i}$.

Komponenten av B_t som er parallell med retningen til overflatestrømmen, $B_{\parallel}$, kan vi studere ved å dreie Amperekurven i figuren over 90 grader (omkring en akse som står normalt på grenseflaten), slik at veielementene $d\mathbf{l}_1$ og $d\mathbf{l}_2$ blir liggende parallelt med henholdsvis $-\mathbf{B}_{1\parallel}$ og $\mathbf{B}_{2\parallel}$. Men en slik Amperekurve vil omslutte null elektrisk strøm, så Amperes lov gir:

$$B_{2\parallel}L - B_{1\parallel}L = 0$$

$$\text{altså: } B_{2\parallel} = B_{1\parallel}$$



Deretter ser vi på komponenten av $\mathbf{B}$ normalt på grenseflaten. Den andre Maxwell-ligningen (dvs Gauss lov) sier at flateintegralet av $\mathbf{B}$ over en lukket flate skal være lik null. Igjen er vi interessert i forholdene like over og like under grenseflaten og lar nok en gang h gå mot null. Det betyr at arealet av de fire vertikale sidekantene av den valgte "Gaussboksen" går mot null, så de eneste bidragene til magnetisk fluks gjennom Gaussflaten må bli gjennom "toppløkket" i område 1 og "bunnen" i område 2. Førstnevnte bidrag blir $B_{1n}A$, ettersom $\mathbf{B}_{1n}$ peker samme vei som flatenormalen $d\mathbf{A}_1$. Sistnevnte bidrag blir $-B_{2n}A$, ettersom $\mathbf{B}_{2n}$ peker motsatt vei av flatenormalen $d\mathbf{A}_2$. Gauss lov for magnetfeltet gir dermed:

$$B_{1n}A - B_{2n}A = 0,$$

altså: $B_{1n} = B_{2n}$

Med andre ord: Normalkomponenten av $\mathbf{B}$ er kontinuerlig når vi krysser en grenseflate.

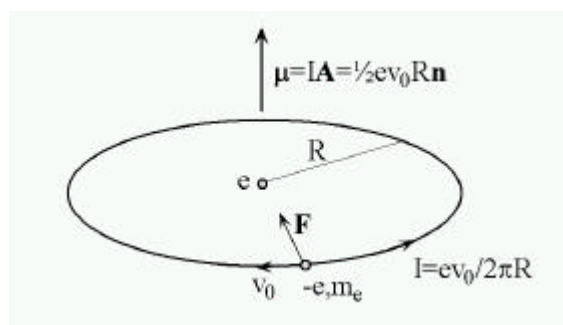
Disse betingelsene for de tre komponentene av $\mathbf{B}$ kan slås sammen til den oppgitte sammenhengen (*):

$$\vec{B}_1 - \vec{B}_2 = \mu_0 \vec{i} \times \hat{n}$$

der høyre side i ligningen er en vektor med størrelse $\mu_0 i$, og med retning mot venstre dersom strømmen kommer ut av planet.

Oppgave 4

La oss starte med å anta at elektronet med ladning $-e$ har en omløpsretning slik at det magnetiske momentet som svarer til banedreieimpulsen peker oppover:



Newtons 2. lov, $\mathbf{F} = m_e \mathbf{a}$, gir den oppgitte ligningen, og dermed hastigheten v_0 uttrykt ved baneradien R :

$$v_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi e_0 m_e R}}$$

Så skruer vi på et magnetfelt $\vec{B}$ rettet nedover. Retningen på den magnetiske kraften $-e\vec{v} \times \vec{B}$ blir da rettet radielt innover, dvs i samme retning som den tiltrekkende Coulombkraften, slik at Newtons 2. lov blir:

$$\frac{e^2}{4\pi e_0 R^2} + evB = \frac{m_e v^2}{R}$$

Vi har her antatt at den magnetiske kraften ikke er så stor at omløpsretningen endres, og dessuten at baneradien forblir uendret, som nevnt i oppgaveteksten. Dette er en annengradsligning for den nye hastigheten v , med løsning

$$v = \frac{eBR}{2m_e} + \sqrt{\frac{e^2}{4\pi e_0 m_e R} + \left(\frac{eBR}{2m_e}\right)^2}$$

Sammenligner vi v med v_0 , ser vi umiddelbart at $v > v_0$. Det betyr at det magnetiske momentet knyttet til banebevegelsen er større enn før vi skrudde på magnetfeltet. Med andre ord, *endringen* i magnetisk moment er motsatt rettet det ytre magnetfeltet.

Hva om magnetfeltet var rettet oppover? Da ville retningen på den magnetiske kraften bli radielt utover, dvs i motsatt retning av Coulombkraften, slik at tilleggsleddet evB ville komme inn med motsatt fortegn. Dermed ville hastigheten v ha blitt mindre enn v_0 , og det magnetiske momentet også mindre enn før vi skrudde på magnetfeltet. Med andre ord, *endringen* i magnetisk moment ville fremdeles ha vært motsatt rettet det ytre magnetfeltet.

Konklusjon: Et ytre magnetfelt påvirker elektronets banebevegelse på en slik måte at det *induserte* magnetiske momentet (dvs: det magnetiske momentet knyttet til endringen i elektronets banebevegelse) blir motsatt rettet det påtrykte feltet. Altså diamagnetisme.