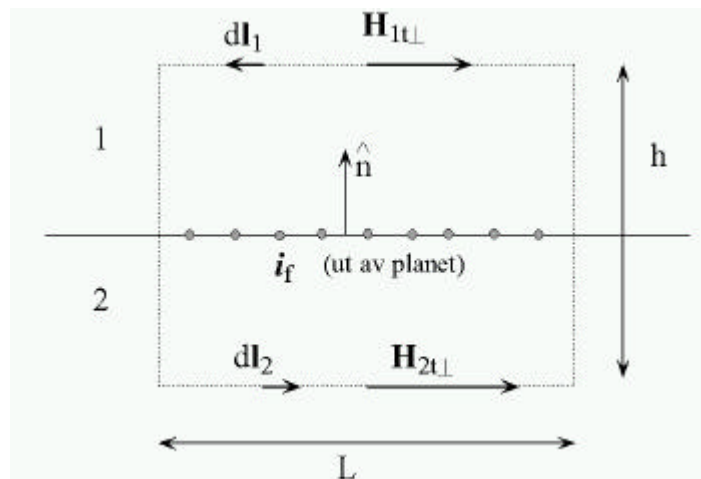


Løsning øving 11

Oppgave 1



Formen på Amperes lov for $\mathbf{H}$ er akkurat den samme som for $\mathbf{B}$, bortsett fra at "høyre side" er erstattet av I_f , der I_f er *fri* strøm innenfor den valgte Amperekurven. Utledningen for tangentialkomponenten til $\mathbf{H}$ blir derfor helt tilsvarende den vi brukte for tangentialkomponenten av $\mathbf{B}$.

La oss starte med den komponenten av H_t som står vinkelrett på retningen til fri overflatestrøm, nemlig $H_{t\perp}$.

Amperes lov sier at kurveintegralet av $\mathbf{H}$ rundt en lukket kurve skal være lik den frie strømmen som omslutes av den lukkede kurven. Her er vi kun interessert i hva $\mathbf{H}$ er *like over* og *like under* grenseflaten som skiller områdene 1 og 2. Vi kan altså la "høyden" h gå mot null, men da får vi også null bidrag til kurveintegralet fra de to vertikale bitene av det stiplede rektangelet. Bidraget fra den horisontale biten i område 2 blir $H_{2t\perp}L$, ettersom $\mathbf{H}_{2t\perp}$ peker samme vei som veelementet $d\mathbf{l}_2$. Bidraget fra den horisontale biten i område 1 blir $-H_{1t\perp}L$, ettersom $\mathbf{H}_{1t\perp}$ her peker motsatt vei av veelementet $d\mathbf{l}_1$. Dermed gir Amperes lov:

$$H_{2t\perp}L - H_{1t\perp}L = I_f = i_f L$$

$$H_{2t\perp} - H_{1t\perp} = i_f$$

(med $i_f = I_f/L$ = tetthet av fri strøm i grenseflaten mellom 1 og 2)

Med andre ord: Komponentene av $\mathbf{H}$ som er tangentiell med grenseflaten og samtidig normal til den frie overflatestrømmen i_f er diskontinuerlig når vi krysser en grenseflate med fri overflatestrøm i_f .

Komponenten av $\mathbf{H}$ som er parallell med retningen til fri overflatestrøm, $H_{t\parallel}$, kan vi studere ved å dreie Amperekurven i figuren over 90 grader (omkring en akse som står normalt på grenseflaten), slik at veelementene $d\mathbf{l}_1$ og $d\mathbf{l}_2$ blir liggende parallelt med henholdsvis $-\mathbf{H}_{1t\parallel}$ og $\mathbf{H}_{2t\parallel}$. Men en slik Amperekurve vil omslutte null fri strøm, så Amperes lov gir:

$$H_{2t\parallel}L - H_{1t\parallel}L = 0$$

altså: $H_{2t\parallel} = H_{1t\parallel}$

Disse betingelsene for de to komponentene av $\mathbf{H}_t$ kan slås sammen til den oppgitte sammenhengen:

$$\vec{H}_{1t} - \vec{H}_{2t} = \vec{i}_f \times \hat{n}$$

der høyre side i ligningen er en vektor med størrelse i_f , og med retning mot venstre dersom strømmen kommer ut av planet.

Ettersom *total* strøm i grenseflaten er summen av fri (I_f) og bundet strøm (I_b), den siste knyttet til en eventuell magnetisering (dersom vi har magnetiserbare medier tilstede), dvs $I = I_f + I_b$, følger det da direkte fra definisjonen av $\mathbf{H}$ -feltet, $\mathbf{H} = (1/\mu_0) \mathbf{B} - \mathbf{M}$, at tangentialkomponenten av $\mathbf{M}$ normalt på retningen til bundet overflatestrøm blir diskontinuerlig dersom grenseflaten inneholder netto bundet strøm:

$$\vec{M}_{1t} - \vec{M}_{2t} = \frac{1}{m_0} (\vec{B}_{1t} - \vec{B}_{2t}) - (\vec{H}_{1t} - \vec{H}_{2t}) = \vec{i} \times \hat{n} - \vec{i}_f \times \hat{n} = \vec{i}_b \times \hat{n}$$

Hva med normalkomponenten av $\mathbf{H}$ og $\mathbf{M}$? Kan vi ikke finne grenseflatebetingelser for dem også, hver for seg, på samme måte som vi gjorde for normalkomponenten av $\mathbf{B}$? Svaret er nei. Selv om divergensen til $\mathbf{B}$ alltid er lik null, gjelder dette ikke generelt for $\mathbf{H}$. Det eneste vi kan si er at normalkomponentene til $\mathbf{H}$ og $\mathbf{M}$ må ha *samme* diskontinuitet, men med *motsatt fortegn*, når en grenseflate krysses:

$$H_{1n} - H_{2n} = -(M_{1n} - M_{2n})$$

Oppgave 2.

For det første kan vi fastslå at alle involverte vektorer her må peke i samme retning som $\mathbf{B}_0$ på grunn av "symmetrien" i problemet: Det er simpelthen ingenting som skiller "høyre" fra "venstre" her!

Dernest har vi umiddelbart at $\underline{H_0 = (1/\mu_0)B_0}$ for $\mathbf{H}$ -feltet utenfor plata. (Intet medium som kan magnetiseres utenfor plata, $M_0 = 0$.)

Dersom plata plasseres *på tvers* i det ytre feltet, kan vi benytte at normalkomponenten av $\mathbf{B}$ skal være kontinuerlig når vi krysser en grenseflate. Det gir $\underline{B_1 = B_0}$. H_1 kan vi dernest bestemme ved å bruke at $B_1 = \mu_1 H_1$, dvs $\underline{H_1 = B_0/\mu_1}$. Magnetiseringen er dermed $M_1 = (1/\mu_0)B_1 - H_1 = B_0/\mu_0 - B_0/\mu_1 = \underline{(1/\mu_0)B_0(1 - \mu_0/\mu_1)}$.

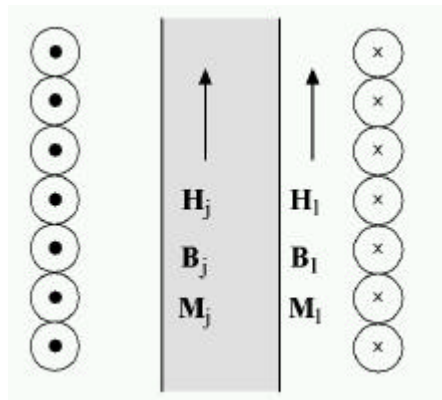
Dersom plata plasseres *på langs* i det ytre feltet, må vi fremdeles av symmetrigrunner ha både $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{H}_1$ og $\mathbf{M}_1$ pekende i samme retning som $\mathbf{B}_0$. Nå kan vi benytte at tangentialkomponenten av $\mathbf{H}$ skal være kontinuerlig når vi krysser grenseflaten, ettersom vi ikke har noen frie (påtrykte) strømmer her. Dermed har vi direkte at $\mathbf{H}$ -feltet inne i plata blir $\underline{H_1 = H_0 = (1/\mu_0)B_0}$. Magnetfeltet B_1 inne i plata bestemmes deretter ved at $B_1 = \mu_1 H_1$, dvs $\underline{B_1 = B_0 \mu_1 / \mu_0}$. Magnetiseringen inne i plata blir $M_1 = (1/\mu_0)B_1 - H_1 = \underline{(1/\mu_0)B_0(\mu_1/\mu_0 - 1)}$.

Vi ser av uttrykkene at jo større verdi på platas permeabilitet μ_1 , jo større blir magnetiseringen M_1 , og jo sterkere blir magnetfeltet B_1 inne i plata (men bare når den står på langs i det ytre feltet).

Det at $\mathbf{B}$ -feltet blir det samme inni som utenfor med plata på tvers kan forstås slik: Siden plata er uendelig stor, ligger hele den induserte overflatestrømmen uendelig langt unna "der vi er". Dermed merkes heller ikke feltbidraget fra den induserte strømmen, og $\mathbf{B}$ -feltet blir uendret. Med plata på langs, derimot, induseres en overflatestrøm på de to uendelig store overflatene som nå ligger i *endelig* avstand fra "der vi er". Dermed settes det opp et indusert magnetfelt inne i mediet med samme retning som det ytre feltet (husk, vi antok at plata var

paramagnetisk), og som har samme absoluttverdi over hele platas tykkelse. Resultatet blir at B-feltet inne i plata blir sterkere enn det ytre feltet (men konstant overalt).

Oppgave 3.



Den påtrykte strømmen I genererer en feltstyrke $H = nI$ på langs inne i solenoiden, uavhengig av materialet (pga Amperes lov). Dermed er det bare å benytte at

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

for å bestemme de ulike størrelsene:

Inne i jernstaven:

$$H_j = n I = 1000 \text{ m}^{-1} \cdot 2 \text{ A} = \underline{2000 \text{ A/m}}$$

$$B_j = \mu_r \mu_0 H_j = 2000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ (Vs/Am)} \cdot 2000 \text{ A/m} = \underline{5.03 \text{ T}}$$

$$M_j = (\mu_r - 1) H_j = \underline{4.0 \cdot 10^6 \text{ A/m}}$$

I den luftfylte delen inne i solenoiden:

$$H_l = H_j = \underline{2000 \text{ A/m}}$$

$$B_l = \mu_0 H_l = \underline{2.51 \cdot 10^{-3} \text{ T}}$$

$$M_l = \underline{0}$$

Den beregnede magnetiseringen inne i jernstaven, $M_j = 4.0 \cdot 10^6 \text{ A/m}$, er større enn metningsmagnetiseringen, og derfor ikke fysisk mulig. Årsaken er at vi har brukt den lineære sammenhengen $B = \mu_r \mu_0 H$ (evt: $M = \chi_m H$) mellom det totale magnetfeltet B og feltet H fra den påtrykte strømmen. (evt: mellom magnetiseringen M og det påtrykte feltet H). Her har vi imidlertid et så sterkt "ytre" felt H at en slik lineær sammenheng ikke lenger er gyldig (jfr hysteresekurven fra forelesningene).

(De beregnede størrelsene er uavhengige av radiene til jernstaven og solenoiden.)

Oppgave 4

Vi bruker definisjonen av magnetisering, nemlig magnetisk moment pr volumenheter. I dette tilfellet er det totale magnetiske momentet et antall N elektronspinn, hver med magnetisk moment μ_B ($= 1$ Bohr magneton) i et volum V . Dermed:

$$M_s = N\mu_B/V$$

$$\Rightarrow n_{\text{spinn}} = N/V = M_s/\mu_B = \frac{1.6 \cdot 10^6}{9.27 \cdot 10^{-24}} \text{ (A/m)/(Am}^2\text{)} = \underline{\underline{1.726 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}}}$$

Antall jernatomer pr m^3 :

$$\begin{aligned} n_{\text{Fe}} &= (7.9 \text{ g/cm}^3) / (55.9 \text{ g/mol}) = 0.141 \text{ mol/cm}^3 = 1.41 \cdot 10^5 \text{ mol/m}^3 = \\ &= 1.41 \cdot 10^5 \cdot 6.02 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3} = 8.508 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \end{aligned}$$

Dermed bidrag fra $n_{\text{spinn}}/n_{\text{Fe}} = 2.03 \approx \underline{2}$ parallelle elektronspinn på hvert jernatom.