

Løsning øving 12

Oppgave 1

Magnetfeltet inne i solenoiden er : $B(t) = \mu_r \mu_0 H(t) = \mu_r \mu_0 (N/L) I(t)$ (dvs for $r < R$).
 Utenfor solenoiden: $B = 0$ ($r > R$)

For å beregne det induerte elektriske feltet utenfor solenoiden, må vi først finne induert elektromotorisk spenning.

Magnetisk fluks innenfor en vilkårlig radius $r > R$ må bli lik magnetisk fluks innenfor radius R (ettersom $B = 0$ for $r > R$):

$$f_m(t) = \int \vec{B}(t) \cdot d\vec{A} = B(t)pR^2 = m_r m_0 \frac{N}{L} I(t)pR^2$$

Fra Faradays induksjonslov får vi da en induert elektromotorisk spenning:

$$E = - \frac{df_m(t)}{dt} = -m_r m_0 \frac{N}{L} pR^2 \frac{dI(t)}{dt}$$

som altså skal være lik $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$. Med sylindersymmetri og integrasjonsvei rundt en sirkel med radius r blir da det induerte elektriske feltet:

$$E_j = E / (2\pi r) = -m_r m_0 \frac{N}{L} \frac{R^2}{2r} \frac{dI(t)}{dt} = \underline{m_r m_0 \frac{N}{L} \frac{R^2}{2r} \omega I_0 \sin \omega t}$$

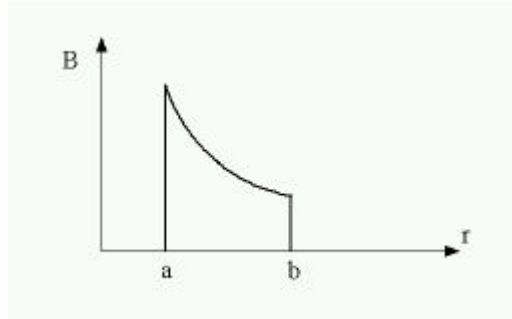
Med $\omega = 2\pi f$ og frekvens $f = 50 \text{ s}^{-1}$, strøm-amplitude $I_0 = 2\text{A}$, og $r = 0.05\text{m}$ blir amplituden A til det elektriske feltet ($E_j = A \sin \omega t$):

$$A = m_r m_0 \frac{N}{L} \frac{R^2}{2r} \omega I_0 = 2000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot \frac{500}{0.5\text{m}} \cdot \frac{(0.01\text{m})^2}{2 \cdot 0.05\text{m}} \cdot 2\pi \cdot 50\text{s}^{-1} \cdot 2\text{A} = \underline{1.6 \frac{\text{V}}{\text{m}}}$$

[Retningen på $\vec{E}_\phi$ ved et bestemt tidspunkt finner vi ved å bruke Lenz' lov: Anta f.eks. at strømmen øker fra I til $I + \Delta I$, med retning som angitt i Figur 1 i oppgaveteksten. Da vil vi få en økning i B -feltet inn i planet. Indusert ems vil da ha en retning svarende til et elektrisk felt som vil generere en strøm i motsatt retning av endringen ΔI , slik at endringen i B -feltet motvirkes. Ved dette tidspunktet blir derfor retningen på $\vec{E}_\phi$ som angitt i Figur 1 i oppgaveteksten.]

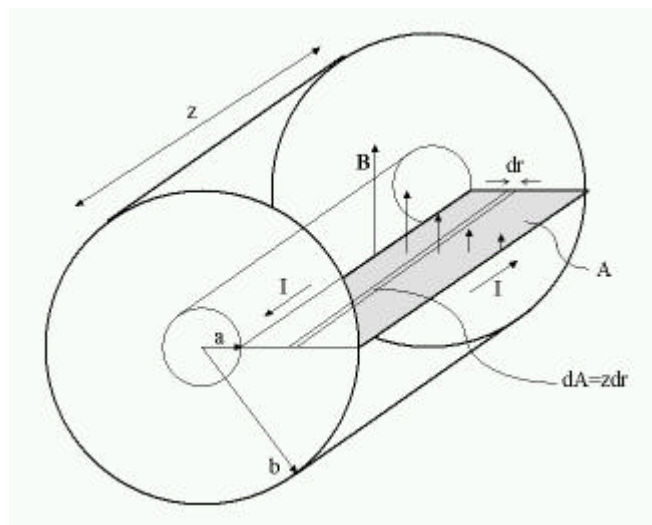
Oppgave 2

a) I Øving 9 beregnet vi magnetfeltet for en slik koaksialkabel, med antagelsen at strømmen var jevnt fordelt i lederne. I denne oppgaven skulle vi anta at all strømmen går i overflaten av indre leder og i indre overflate av ytre leder. Magnetfeltet blir dermed som skissert i figuren, med



$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{for } a < r < b$$

og $B = 0$ ellers (med bruk av Amperes lov). Dermed kan vi beregne den magnetiske fluksen mellom indre og ytre leder på et stykke med lengde z , og derfra selvinduktansen L for dette stykket av kabelen.



$$\Phi_m = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} z dr = \frac{\mu_0 z I}{2\pi} \left[\ln r \right]_a^b = \frac{\mu_0 z I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$\Rightarrow$

$$\dot{\Phi}_m = \frac{\mu_0 z}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \dot{I}$$

$\Rightarrow$

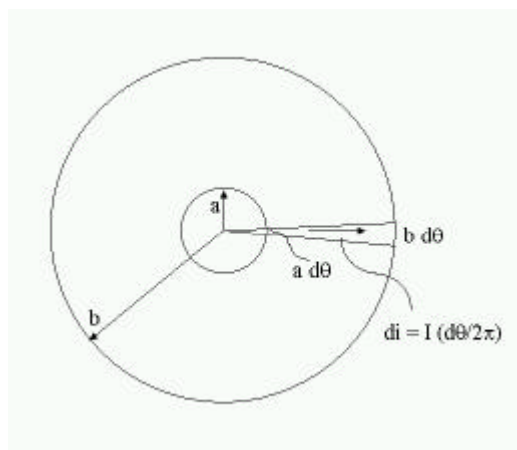
$$L = \frac{\mu_0 z}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

(Vel, om vi definerer selvinduktansen ut fra $\phi_m = L I$ eller fra $d\phi_m/dt = L (dI/dt)$ spiller her selvsagt ingen rolle!)

Selvinduktansen pr lengdeenhet blir dermed:

$$L' = \frac{L}{z} = \frac{\mu_0}{2p} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Legg merke til arealet A som vi beregner den magnetiske fluksen gjennom, se figuren ovenfor (gråskravert rektangel med lengde z og bredde $(b-a)$). Det vi har gjort virker kanskje litt "rart", for strengt tatt har vi her ikke ei lukket strømsløyfe som omslutter det arealet A som vi beregner fluksen gjennom, og strømmen I som er jevnt fordelt i de to sylinderflatene ved $r = a$ og $r = b$ omslutter strengt tatt ikke den indikerte flaten. Men: Tenk deg nå at vi har en lang kabel der vi i hver endeflate har forbundet indre og ytre leder med ei metallisk skive som dekker det sirkulære arealet mellom $r = a$ og $r = b$. Da har vi en lukket krets, der strømmen I kan strømme gjennom endeskiva fra indre til ytre leder på "framsida", og fra ytre til indre leder på "baksida". Tenk deg videre at du i første omgang betrakter en liten del av de to sylinderflatene, med tykkelse henholdsvis $a d\theta$ for indre leder og tykkelse $b d\theta$ for ytre leder, og som forbindes via de to nevnte endeflateskivene med en sektor slik at strømmen som går i denne lukkede kretsen blir $di = I (d\theta/2\pi)$:



Nå har vi en lukket krets som fører en strøm di , og som omslutter den beregnede fluksen. Imidlertid gir beregningen oss fluksen uttrykt ved den *totale* strømmen I direkte, og pr definisjon er kabelens selvinduktans bestemt av forholdet mellom omsluttet fluks og total strøm.

$$b) L = (4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10/2\pi) \cdot \ln(3.0/0.5) = \underline{3.6 \cdot 10^{-6} \text{ H} = 3.6 \mu\text{H}}$$

c) Energitettheten blir:

$$w_m = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2$$

Energiinnholdet på et stykke av lengde z blir dermed:

$$W = \int w_m dV = \int_a^b w_m z 2\pi r dr = \frac{1}{2} \mu_0 I^2 z \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_0 z}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Når vi så bruker $W = W' \quad z = \frac{1}{2} L' I^2$ har vi

$$L' = \frac{m_0}{2p} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

som funnet under punkt a).

$$d) \quad w_m = \frac{1}{2} m_0 \left(\frac{I}{2pr} \right)^2 = \frac{m_0 I^2}{8p^2 b^2} = \frac{10^{-7} \cdot 4.0^2}{2p \cdot 0.0030^2} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 28.3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \underline{28.3 \text{ mPa}}$$

(1 Pa = 1 N/m²)

Til sammenligning er et trykk på 1 atm (osfære) lik $1.03 \cdot 10^5$ Pa, så det er ikke noe voldsomt trykk det her er snakk om.....

Oppgave 3

a) Med det oppgitte feltet blir feltet fra spole A ved spole B:

$$B_z = \frac{m_0 N_A i_A a^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}}$$

Med $b \ll a$ kan B_z regnes konstant over hele spolen B, slik at fluksen gjennom denne blir:

$$f_m = N_B B_z p b^2$$

Den gjensidige induktansen $M_{AB} = M_{BA} = M$ er definert ved:

$$\mathcal{E}_B = -M \frac{di_A}{dt}$$

Faradays lov gir:

$$\mathcal{E}_B = -\frac{df_m}{dt} = -N_B p b^2 \frac{m_0 N_A}{2} \frac{a^2}{(d^2 + a^2)^{3/2}} \frac{di_A}{dt}$$

som gir

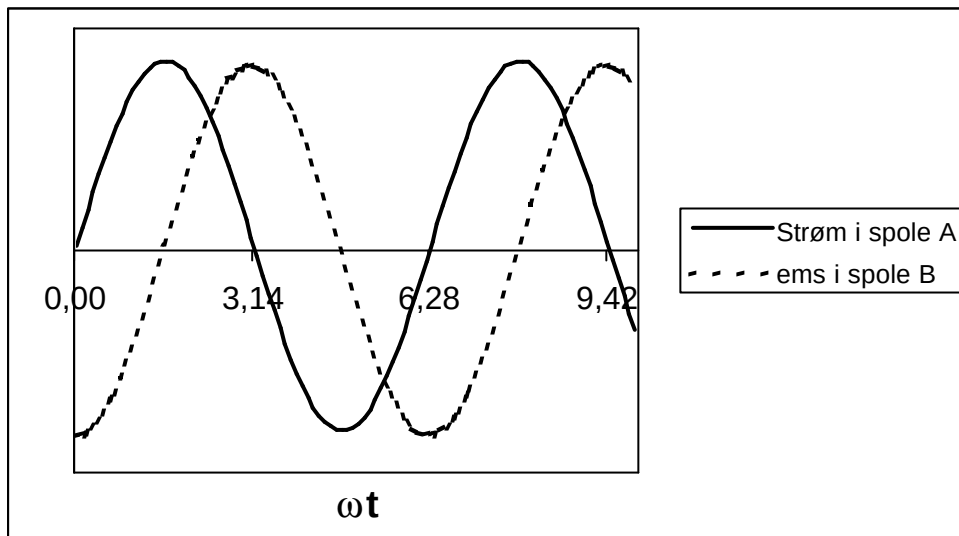
$$M = \frac{1}{2} p m_0 N_A N_B a^2 b^2 (d^2 + a^2)^{-3/2}$$

b)

$\frac{di_A}{dt} = I_A \omega \cos \omega t$, og med innsatte verdier finner en $M = 706 \cdot 10^{-9} \text{ H} = 706 \text{ nH}$. Dermed blir den induserte spenningen i spole B:

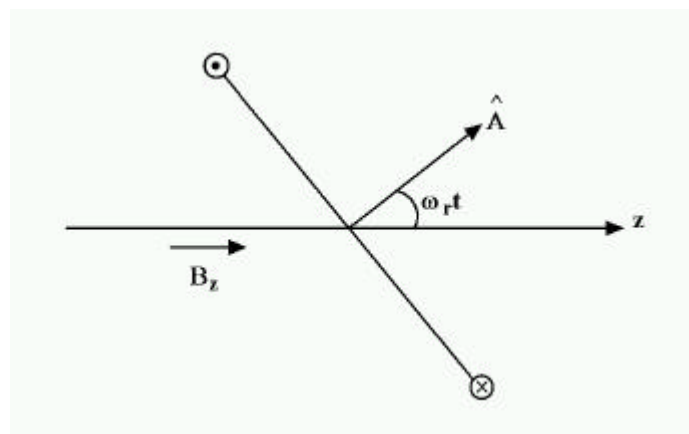
$$E_B = -706 \text{ nH} \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 1 \text{ A} \cdot \cos \omega t = \underline{-0.22 \text{ mV} \cdot \cos \omega t}$$

Den induserte (mot)spenningen E_B er faseforskjøvet en vinkel $\pi/2$ i forhold til strømmen i_A :



c) Når spole B roterer, varierer vinkelen mellom flatenormalen $\hat{A}$ til spolen og magnetfeltet slik at fluksen blir ($\hat{A} \cdot \hat{B} = \cos \omega_r t$)

$$\phi_m = N_B B_z \pi b^2 \cos \omega_r t$$



Den induserte spenningen blir dermed:

$$E_B = -d\phi_m/dt = N_B B_z \pi b^2 \omega_r \sin \omega_r t = \underline{0.44 \text{ mV} \sin \omega_r t}$$

Legg merke til at svaret blir det dobbelte av svaret under punkt b) fordi eneste endring i størrelser er at frekvensen er doblet.

Oppgave 4

Vinkelfrekvensen er:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} = 314 \text{ s}^{-1}$$

Impedansen, $Z = V/I$, blir dermed for

a) en motstand $R = 30 \Omega$:

$$Z = R = |Z| \exp(i\alpha) \Rightarrow$$

$$\underline{|Z| = R = 30 \Omega, \alpha = 0^\circ}$$

b) en induktans $L = 1.45 \text{ mH}$:

$$Z = i\omega L = |Z| \exp(i\alpha) \Rightarrow$$

$$\underline{|Z| = \omega L = 314 \cdot 1.45 \cdot 10^{-3} \Omega = 0.46 \Omega, \alpha = \pi/2}$$

c) en kapasitans $C = 25 \mu\text{F}$:

$$Z = 1/(i\omega C) = |Z| \exp(i\alpha) \Rightarrow$$

$$\underline{|Z| = 1/(\omega C) = 1/(314 \cdot 25 \cdot 10^{-6}) = 127 \Omega, \alpha = -\pi/2}$$

(Sammenhengen mellom V og I for disse enkle kretsene, hhv a) VR-krets, b) VL-krets, og c) VC-krets har vi utledet i forelesningene.)

Oppgave 5

$$V_i = RI + Q/C = R dQ/dt + Q/C$$

$$V_u = Q/C$$

Sett $V_i = V_{i0} \exp(i\omega t)$ og $Q = Q_0 \exp(i\omega t)$, som gir:

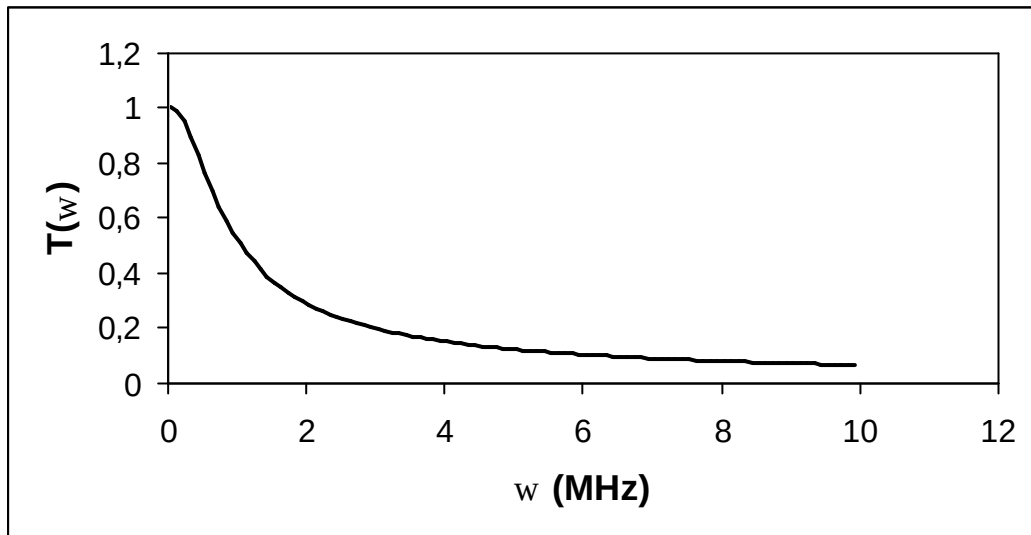
$$V_{i0} = i\omega R Q_0 + Q_0/C = Q_0(i\omega R + 1/C)$$

$$V_{u0} = Q_0/C$$

Dermed: $V_{u0}/V_{i0} = (1/C)/(i\omega R + 1/C) = 1/(1 + i\omega RC)$, og

$$T = |V_{u0}/V_{i0}| = \underline{1/(1 + \omega^2 R^2 C^2)^{1/2}}$$

$$T = \frac{1}{2} \text{ når } 1 + \omega^2 R^2 C^2 = 4, \text{ dvs: } \omega = 3^{1/2}/(50 \cdot 34.6 \cdot 10^{-9}) \text{ s}^{-1} = 1 \cdot 10^6 \text{ Hz} = \underline{1 \text{ MHz}}$$



Dette betyr at hvis f.eks. "inn-spenningen" V_i er et sammensatt signal som består av mange forskjellige frekvenser, så vil "ut-spenningen" V_u over kondensatoren ha en amplitude omtrent lik inn-signalet for lave frekvenser, mens amplituden for høye frekvenser er svekket. Derfor kalles dette et lavpassfilter, ettersom lave frekvenser kan "passere gjennom" kretsen. Hvis vi hadde byttet ut kondensatoren med en spole med selvinduktans L , ville kretsen ha representert et høypassfilter, med $T(\omega) = \omega / [(R/L)^2 + \omega^2]^{1/2}$, slik at ut-signalet er svekket for lave frekvenser, mens de høye frekvensene "slipper gjennom". Med denne oppgaven som utgangspunkt skulle det ikke være altfor vanskelig å vise dette. Legg også merke til at vi kan lage høypassfilter med RC-kretsen og lavpassfilter med RL-krets, ved i begge tilfelle å ta ut-spenningen over motstanden R .