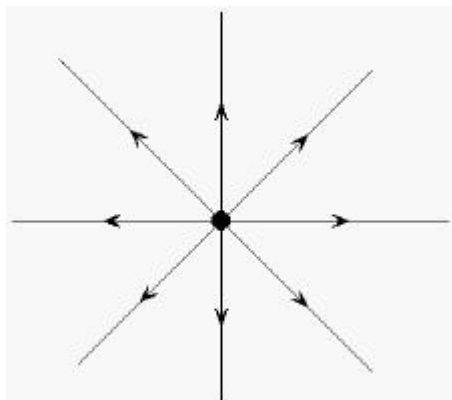


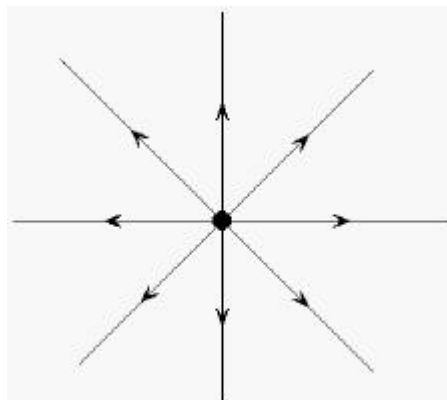
Løsning øving 2

Oppgave 1

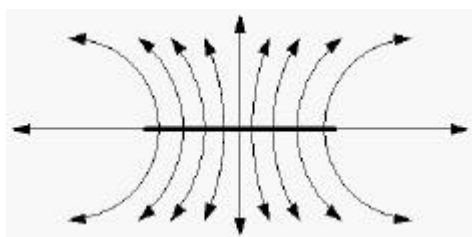
a) Nært:



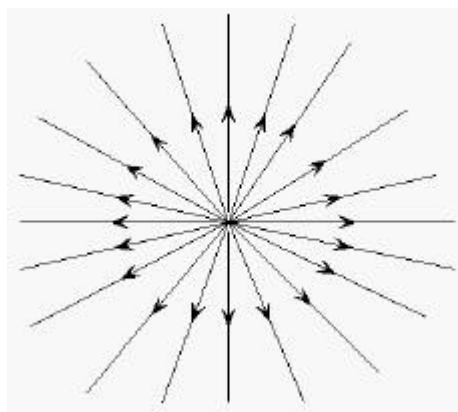
Langt unna:



b) Nært:

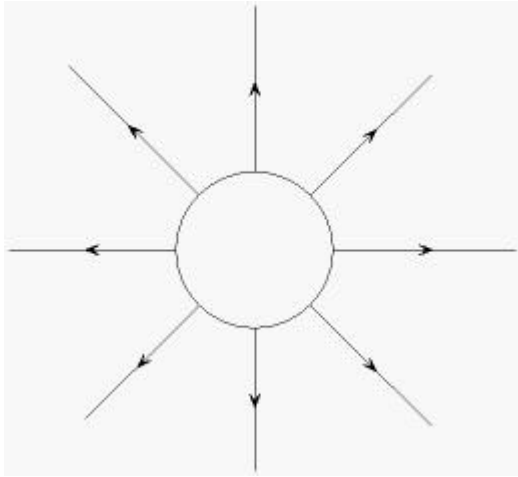


Langt unna:

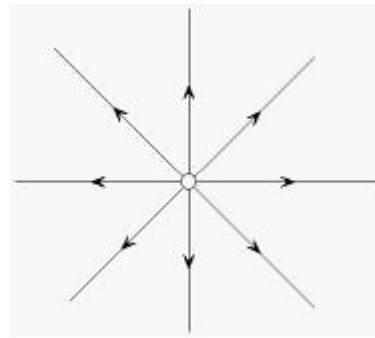


Oppgave 2

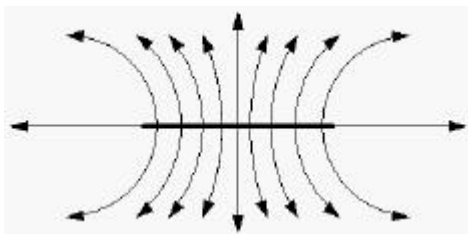
a) Nært:



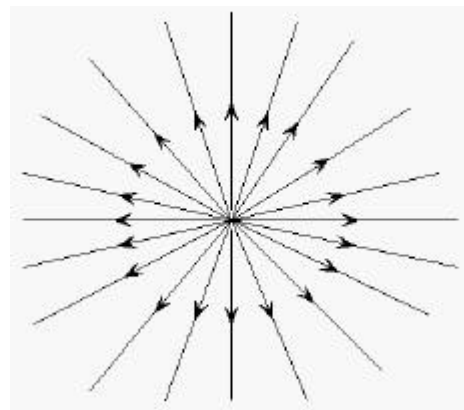
Langt unna:



b) Nært:



Langt unna:



Legg merke til at både staven og skiva kan tilnærmet betraktes som punktladninger når vi er tilstrekkelig langt unna.

Oppgave 3

a) Det elektriske potensialet fra en punktladning er: $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ (med valget $V(\infty) = 0$). Da

elektrisk potensial er potensiell energi pr ladningsenhet, blir potensiell energi mellom par av

punktladninger i innbyrdes avstand r lik $U = \pm \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r}$, med positivt fortegn for to like ladninger og

negativt fortegn for to ulike ladninger. Den totale potensielle energien finner vi ved å summere over samtlige par av punktladninger. Arbeidet som må utføres for å putte en fjerde ladning, $+q$, i det ledige hjørnet av kvadratet bestemmes ved å beregne den tilsvarende endringen i systemets potensielle energi. I utgangspunktet har vi 3 ladninger, altså må det summeres over 3 par av punktladninger:

$$U_{\text{før}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q^2}{a} - \frac{q^2}{a} - \frac{q^2}{\sqrt{2}a} \right) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2}a}$$

Med ladning nummer 4 på plass får vi bidrag fra i alt 6 par av punktladninger:

$$U_{\text{etter}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(2\frac{q^2}{a} - 2\frac{q^2}{a} - 2\frac{q^2}{\sqrt{2}a} \right) = -2\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2}a}$$

Utført arbeid på systemet av punktladninger blir dermed:

$$W = U_{\text{etter}} - U_{\text{før}} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2}a}$$

$W < 0$ betyr et *negativt* arbeid utført på ladningene, hvilket betyr at ladningene har utført et positivt arbeid på omgivelsene.

Det totale arbeidet som må til for å sette sammen denne konfigurasjonen av 4 punktladninger blir rett og slett lik U_{etter} , da $U_{\text{før}} = 0$ for 4 punktladninger uendelig langt fra hverandre. Altså:

$$W_{\text{tot}} = U_{\text{etter}} = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{2}a}$$

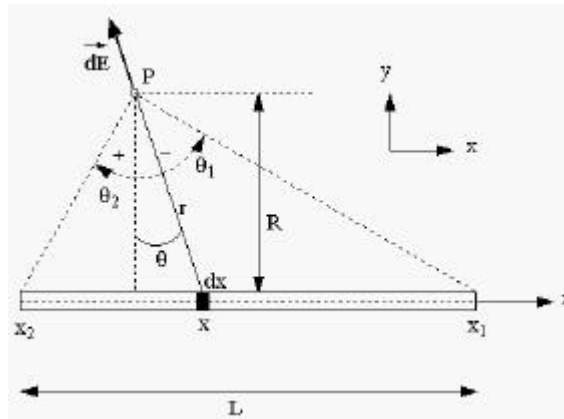
b) Med de samme ladningene i hvert sitt hjørne av et rektangel med sidekanter a og b blir total potensiell energi, og dermed totalt arbeid påkrevd for å sette sammen ladningene på denne måten lik:

$$W = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{a} - \frac{2}{b} - \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(1 - \frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2}} \right) = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \right) \quad (\text{med } x = b/a)$$

Å løse $W(x) = 0$ er, såvidt jeg kan se, ikke mulig å gjøre eksakt, men vi innser umiddelbart at jo større x er, jo større blir $W(x)$. Med $x=1$ får vi W_{tot} fra oppgave a), altså negativ W . La oss prøve $x=2$:

$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.05 > 0$. Altså skifter $W(x)$ fortegn like under $x=2$, slik at riktig svar må være $b/a > 1.88$.

Oppgave 4



a) Elektrisk felt fra lengdeelement dx :

$$d\vec{E} = A \frac{dx}{r^2} \hat{r}$$

der $A = l/4\pi\epsilon_0$. Det gir komponentene

$$\begin{aligned} dE_x &= dE \sin q \\ dE_y &= dE \cos q \end{aligned}$$

med fortegnvalg som i oppgaven, dvs $q < 0$ når $x > 0$. Vi har følgende sammenhenger:

$$\begin{aligned} R &= r \cos q \quad \text{eller} \quad r = \frac{R}{\cos q} \quad (R = \text{konst.}) \\ -x &= r \sin q = R \tan q \\ -dx &= R \frac{dq}{\cos^2 q} \\ -\frac{dx}{r^2} &= \frac{1}{R} dq \\ \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{r^2} &= -\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{r^2} = \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{R} \end{aligned}$$

Integrasjon gir dermed:

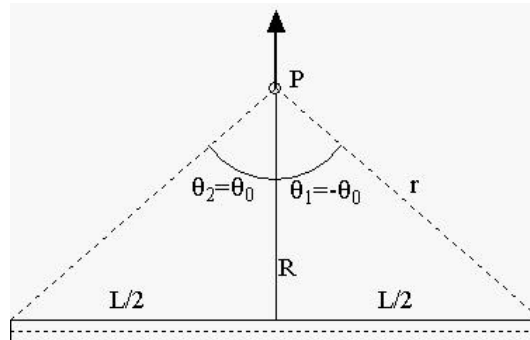
$$\begin{aligned} E_x &= \int dE_x = \frac{A}{R} \int_{q_1}^{q_2} \sin q \, dq = \frac{A}{R} \Big|_{q_1}^{q_2} (-\cos q) = \underline{\underline{\frac{A}{R}(\cos q_1 - \cos q_2)}} \\ E_y &= \int dE_y = \frac{A}{R} \int_{q_1}^{q_2} \cos q \, dq = \frac{A}{R} \Big|_{q_1}^{q_2} (\sin q) = \underline{\underline{\frac{A}{R}(\sin q_2 - \sin q_1)}} \end{aligned}$$

(der altså $q_1 < 0$ og $q_2 > 0$).

b) Langs midtnormalen har en:

$$\sin q_2 = -\sin q_1 = \sin q_0 = \frac{L}{2r}$$

$$\cos q_2 = \cos q_1 = \cos q_0$$

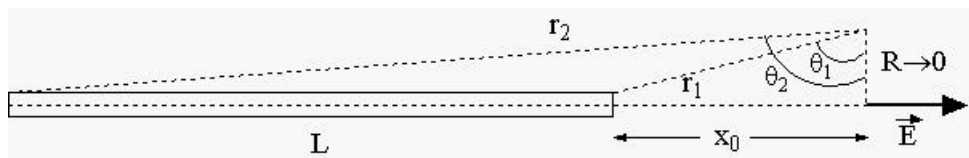


Følgelig finnes langs midtnormalen:

$$E_x = 0$$

$$E_y = \frac{A L}{R r} = \frac{I L}{4\pi\epsilon_0 R \sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}}$$

c) I stavens forlengelse i avstand x_0 finner en



$$\cos q_1 = \frac{R}{r_1} = \frac{R}{\sqrt{x_0^2 + R^2}} = \frac{R}{x_0 \sqrt{1 + \left(\frac{R}{x_0}\right)^2}} = \frac{R}{x_0} + \dots$$

og tilsvarende

$$\cos q_2 = \frac{R}{L + x_0} + \dots$$

slik at

$$E_x = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{A}{R} (\cos q_1 - \cos q_2) = \frac{A}{R} \left(\frac{R}{x_0} - \frac{R}{L + x_0} \right) = \frac{AL}{x_0(L + x_0)}$$

Videre er så, ved rekkeutvikling ($(R/x_0)^2 \rightarrow 0$):

$$\sin q_1 = \frac{x_0}{r_1} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + R^2}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{x_0} \right)^2 + \dots$$

$$\sin q_2 = \frac{x_0 + L}{r_2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L + x_0} \right)^2 + \dots$$

slik at

$$E_y = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{A}{R} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{x_0} \right)^2 + \dots - \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L + x_0} \right)^2 + \dots \right) \right] = 0$$

Resultatet $E_y=0$ er vel lett å innse ved direkte betraktning. Videre, og som nevnt i oppgaveteksten, kan E_x enkelt bestemmes ved direkte integrasjon:

$$E_x = A \int_{-L}^0 \frac{dx}{(x_0 - x)^2} = A \left| \frac{1}{x_0 - x} \right|_{-L}^0 = A \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0 + L} \right) = \frac{AL}{x_0(x_0 + L)}$$

(når origo legges i høyre ende av staven).