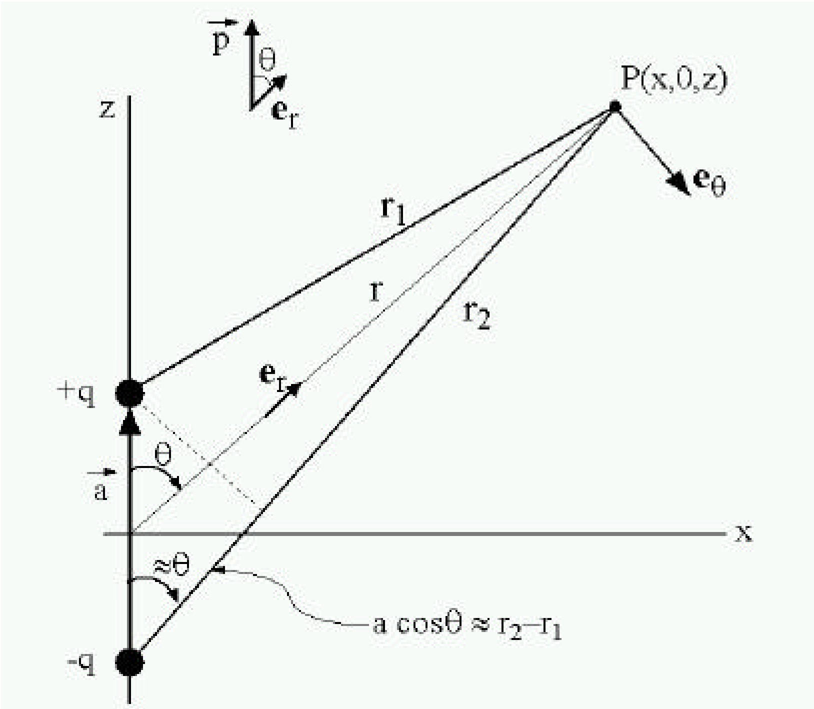
Institutt for fysikk, NTNU
Fag SIF 4012 Elektromagnetisme og
MNFFY 103 Elektrisitet og magnetisme
Høst 2002

Løsning øving 3

Oppgave 1

a)



Potensialet fra de to ladningene er gitt ved:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)}{r_2}$$

Til ledende orden, når r » a, finner en så:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \approx \frac{a\cos\theta}{r_1 r_2} \approx \frac{a\cos\theta}{r^2}$$

(Dette er kanskje det springende punkt i denne oppgaven? Korreksjoner til dette uttrykket vil være av høyere orden i "litenhetsparameteren" *a/r*.)
Med $qa\cos\theta = p\cos\theta = \vec{p}\,\boldsymbol{e}_r = \vec{p}\vec{r}/r$ gir dette

$$V(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} = \underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}}$$

b) Det elektriske feltet blir:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2p\cos\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{p\sin\theta}{r^2}\boldsymbol{e}_\theta\right) = \underline{\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta\right)}$$

For θ = 0: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}\boldsymbol{e}_r$ som er rimelig; direkte beregning av E-feltet langt ute på den positive z-aksen gir:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1^2} - \frac{q}{r_2^2}\right)\boldsymbol{e}_z = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)}{r_1^2 r_2^2}\boldsymbol{e}_z \approx \frac{2aq}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{e}_z$$

der vi har brukt $r_2 - r_1 = 2a$, $r_2 + r_1 \approx 2r$ og $r_2 \approx r_1 \approx r$.

For θ = π/2: $\vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{\theta}$ som er rimelig; direkte beregning av E-feltet langt ute på den positive x-aksen gir:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1^2}\frac{a/2}{r_1} - \frac{q}{r_2^2}\frac{(-a/2)}{r_2}\right)(-\boldsymbol{e}_z) \approx \frac{aq}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(-\boldsymbol{e}_z)$$

der symmetribetraktning gir at x-komponenten av feltet må bli lik null, mens bidraget til z-komponenten fra hver ladning fås ved å gange med sinus til vinkelen mellom x-aksen og hhv r_1 og r_2.

For r = 0: $\vec{E} \to \infty$ Dette er ikke riktig! Grunnen er at $r \gg a$ ikke lenger er oppfylt. Det riktige svaret er:

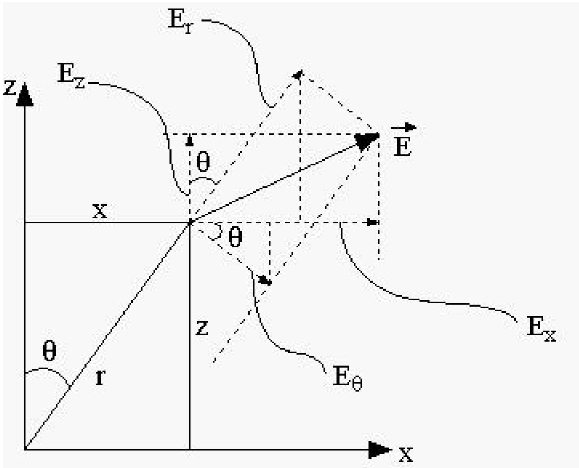
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{(a/2)^2} + \frac{q}{(a/2)^2}\right)(-\boldsymbol{e}_z) = -\frac{2q}{\pi\varepsilon_0 a^2}\boldsymbol{e}_z$$

c) E_x-komponenten er sammensatt av x-komponentene fra E_θ og E_r:

$$E_x = E_\theta\cos\theta + E_r\sin\theta$$

Tilsvarende for z-komponenten:

$$E_z = -E_\theta\sin\theta + E_r\cos\theta$$



(En kontroll på at disse sammenhengene er riktige er f.eks. å regne ut $E^2=E_x^{\ 2}+E_z^{\ 2}$ og sjekke at svaret blir $E_\theta^{\ 2}+E_r^{\ 2}$.)

Dette gir:

$$4\pi\varepsilon_0 E_x = \frac{p}{r^3}\sin\theta\cos\theta + \frac{2p}{r^3}\cos\theta\sin\theta = \frac{3p}{r^3}\sin\theta\cos\theta = \underline{3p\frac{xz}{\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}}$$

$$4\pi\varepsilon_0 E_z = -\frac{p}{r^3}\sin^2\theta + \frac{p}{r^3}2\cos^2\theta = \underline{p\frac{2z^2-x^2}{\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}}$$

$$\underline{\vec{E}(x,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}\left(3xz\,\mathbf{e}_\mathrm{x} + \left(2z^2-x^2\right)\mathbf{e}_\mathrm{z}\right)}$$

Her har vi brukt sinθ = x/r, cosθ = z/r, $r = (x^2+z^2)^{1/2}$. Dessuten ser vi hele tiden på et punkt i xz-planet, slik at y = 0 og $E_y = 0$.

d) I kartesiske koordinater blir potensialet

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p(z/r)}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pz}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}$$

Med $\vec{E} = -\nabla V$ får vi dermed:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3pzx}{\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-p}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}} + \frac{3pz^2}{\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}\right) = \underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\left(2z^2-x^2\right)}{\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}}$$

som funnet under punkt c).

Oppgave 2

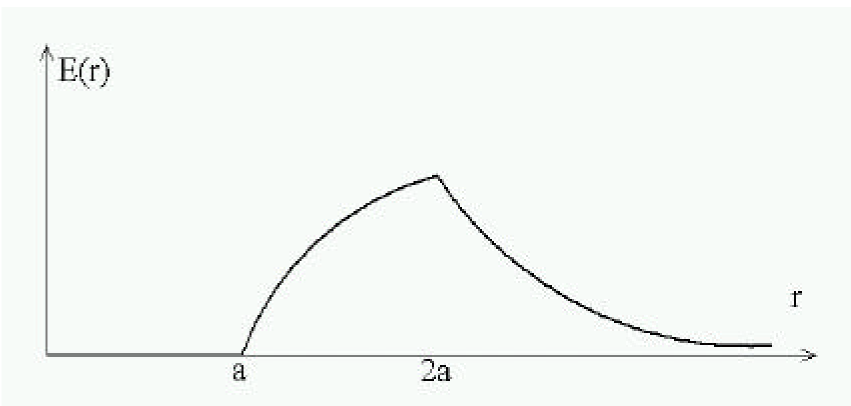
Gauss lov: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{e_0}$ der q_{in} er netto ladning innenfor den lukkede flaten som vi integrerer over (Gaussflaten). Her har vi kulesymmetrisk ladningsfordeling, slik at det elektriske feltet kun blir avhengig av avstanden fra kuleskallets sentrum: $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Vi velger da naturligvis en kuleflate som Gaussflate, slik at Gauss lov blir $E(r) \cdot 4pr^2 = q(r)/e_0$, med $q(r) = \int rdV = \int_0^r r(r') \cdot 4pr'^2\, dr' =$ netto ladning innenfor kuleskall med radius r. Med den oppgitte romladningstettheten har vi:

$$q(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ 4pk\int_a^r dr' = 4pk(r-a) & a < r < b \\ 4pk\int_a^b dr' = 4pk(b-a) & r > b \end{cases}$$

Dermed blir det elektriske feltet

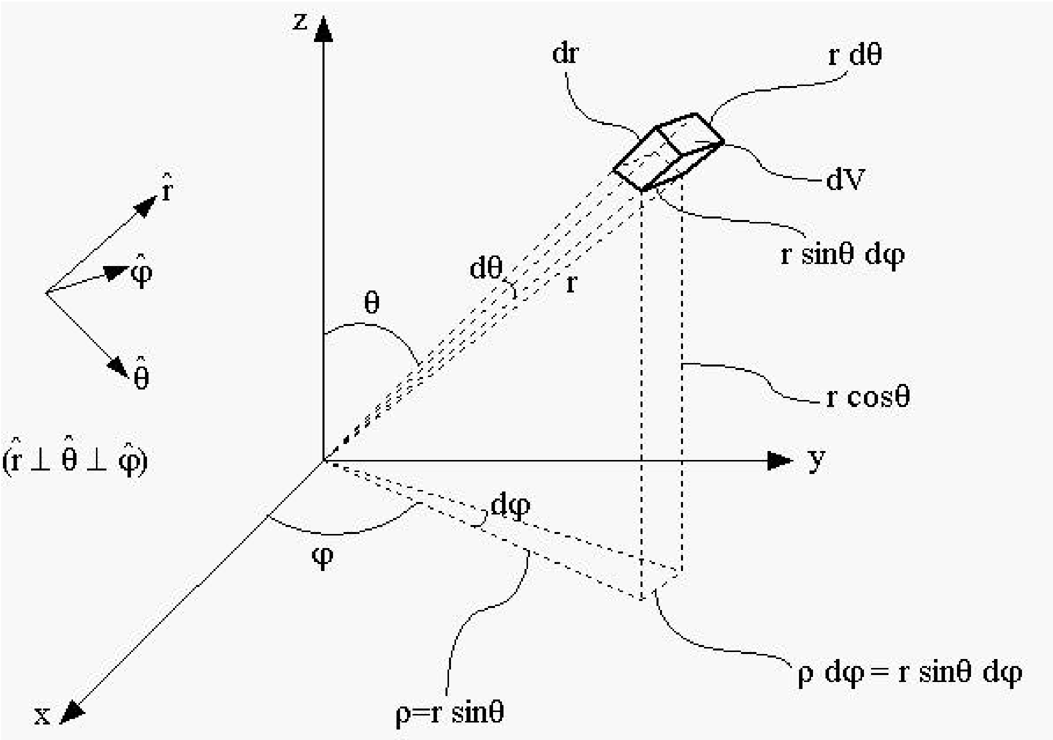
$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \dfrac{k(r-a)}{e_0 r^2} & a < r < b \\ \dfrac{k(b-a)}{e_0 r^2} & r > b \end{cases} \qquad \text{Og med b=2a:} \qquad E(r) = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{k(r-a)}{e_0 r^2} \\ \dfrac{ka}{e_0 r^2} \end{cases}$$

Skisse:



(En ser umiddelbart at E(r) er kontinuerlig. Ved å derivere uttrykket for E(r) i området a<r<2a to ganger finner en at helningen er positiv (men endelig) i r=a og lik null i r=2a, og at krumningen er negativ i hele området a<r<2a.)

Oppgave 3



a) Lengden av linjeelementet som går diagonalt i volumet dV er:

$$d\vec{s} = \underline{\hat{r}dr + \hat{q}\, r\, dq + \hat{j}\, r \sin q\ dj}$$

Arealelementet på de ulike sideflatene til dV er:

$$d\vec{A_r} = \underline{r\ dq\ r \sin q\ dj\ \hat{r}}$$
$$d\vec{A_q} = \underline{dr\ r \sin q\ dj\ \hat{q}}$$
$$d\vec{A_j} = \underline{r\ dq\ dr\ \hat{j}}$$

Volumelementet blir:

$$dV = dr\ r\ dq\ r \sin q\ dj = \underline{r^2 \sin q\ dr\ dq\ dj}$$

b) Areal av kuleflate:

$$A(R) = \int_{r=R} \hat{r}\, d\vec{A_r} = R^2 \int_0^{2p} dj \int_0^{p} \sin q\ dq = R^2 \cdot 2p \cdot 2 = \underline{4pR^2}$$

Kulevolum:

$$V(R) = \int_{r<R} dV = \int_0^R dr \int \hat{r}\, d\vec{A_r} = \int_0^R dr 4pr^2 = \underline{\frac{4p}{3} R^3}$$