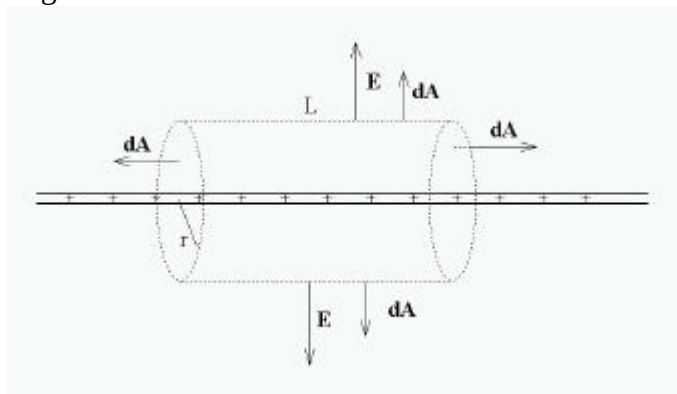


Løsning øving 4

Oppgave 1

Symmetrien i problemet tilsier at det elektriske feltet overalt må stå vinkelrett på staven, og dessuten at feltstyrken må være like stor overalt på overflaten av en sylinder lagt konsentrisk om staven, som vist i figuren:



Det er da naturlig å velge nettopp en slik sylinder som Gaussflate. På "bunn"- og "toppflaten" til sylindren står $\mathbf{E}$ vinkelrett på flatenormalen $d\mathbf{A}$, slik at vi får null elektrisk fluks gjennom disse flatene. På sylinderoverflaten er $\mathbf{E}$ parallell med $d\mathbf{A}$, og som sagt med konstant absoluttverdi E , slik at flateintegralet av $\mathbf{E}$ over den valgte Gaussflaten reduserer seg til $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E \cdot 2\pi r L = Q / \epsilon_0$, der $A = 2\pi r L$ er arealet av sylinderoverflaten (radius r , lengde L). Netto ladning inne i sylindren er $Q = \lambda L$, slik at det elektriske feltet blir

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \text{ som skulle vises.}$$

I oppgave 4a, Øving 2 viste vi at feltet i avstand r fra en ladet stav med endelig lengde hadde komponenter $E_{\perp} = (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \lambda / 4\pi\epsilon_0 r$ normalt på staven og $E_{\parallel} = (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \lambda / 4\pi\epsilon_0 r$ parallelt med staven. Linjene fra observasjonspunktet til endene av staven danner vinklene θ_1 (negativ) og θ_2 (positiv) med normallinjen fra observasjonspunktet og ned på staven. Lar vi stavens lengde gå mot uendelig, svarer det til at vi lar vinklene θ_1 og θ_2 gå mot hhv $-\pi/2$ og $+\pi/2$, slik at $E_{\parallel} \rightarrow 0$ og $E_{\perp} \rightarrow \lambda / 2\pi\epsilon_0 r$; altså samme svar som funnet med Gauss lov.

Oppgave 2.

- $\sigma = \sigma_{\text{maks}} = \epsilon_0 E_{\text{maks}} = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^6 = \underline{27 \mu\text{C}/\text{m}^2}$.
- $\sigma_{\text{maks}} = Q / 4\pi R_{\text{min}}^2 \Rightarrow R_{\text{min}} = (Q / 4\pi \sigma_{\text{maks}})^{1/2} = (1 / 4\pi \cdot 27 \cdot 10^{-6})^{1/2} \text{ m} = \underline{54 \text{ m}}$.
- Areal pr atom: $A = (0.3 \text{ nm})^2 = 9 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2$.
 Midlere antall atomer pr m^2 : $n_A = 1/A = \underline{11 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-2}}$.
- Antall elektroner pr m^2 : $n_e = \sigma_{\text{maks}} / e = 17 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-2}$.
 Andel av atomene i overflatelaget med et ekstra elektron:
 $n_e / n_A = 17 \cdot 10^{13} / 11 \cdot 10^{18} = \underline{1.5 \cdot 10^{-5}}$.
 Dvs, bare ett av ca 65000 atomer har overskudd (eller underskudd) av ett elektron.
 Følgelig har ytterste atomlag mer enn nok kapasitet til å ta opp ladning på en metalloverflate.

Oppgave 3.

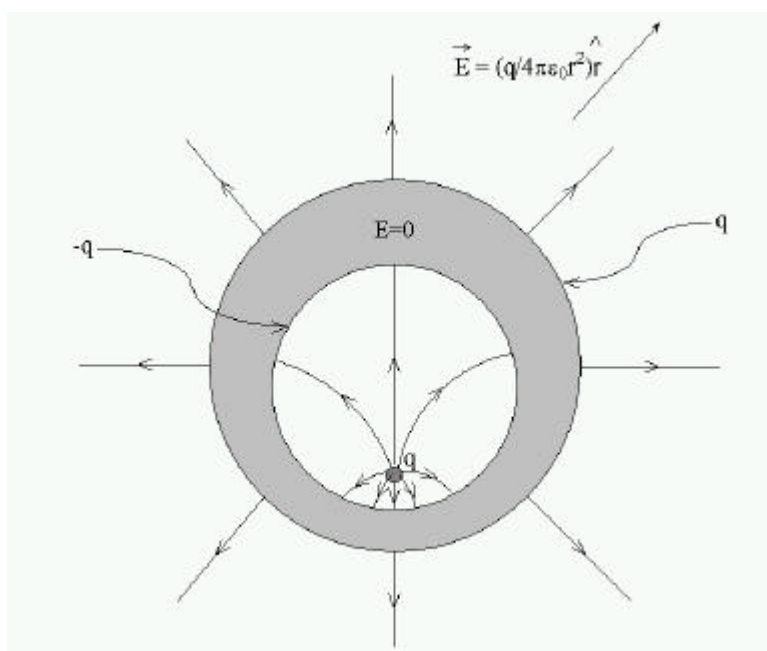
Vi argumenterte i forelesningene for at $E = 0$ overalt inne i en elektrisk leder når vi har elektrostatiske likevekt. Dersom vi nå velger ei Gaussflate som omslutter hulrommet, og som ligger i sin helhet inne i lederen, gir Gauss lov at total nettoladning innenfor denne flaten må være lik null. Vi kan legge Gaussflaten vilkårlig nær hulrommets overflate. Dermed må vi ha en induert ladning $-q$ på hulrommets overflate, for da blir netto ladning innenfor Gaussflaten $q - q = 0$. Denne induerte ladningen vil fordele seg på hulrommets overflate på en slik måte at det elektriske feltet forsvinner overalt inne i lederen, dvs at bidraget til feltet inne i lederen fra punktladningen q akkurat kanselleres av bidraget fra den induerte ladningen $-q$. Da er det vel opplagt at vi må få størst induert ladning på den delen av hulrommets overflate som ligger nærmest punktladningen og minst induert ladning på den delen av hulrommets overflate som ligger lengst unna punktladningen.

Lederen var antatt å være elektrisk nøytral. Det betyr at vi må ha fått induert en ladning q på lederens ytre overflate, slik at total ladning på lederen blir $q - q = 0$. (Velg en Gaussflate inne i lederen men vilkårlig nær den ytre overflaten. Med $E = 0$ på Gaussflaten må netto ladning innenfor være lik null, altså må den induerte ladningen q ligge på den ytre overflaten.) Denne ladningen vil fordele seg jevnt utover den ytre overflaten, fordi asymmetrien som skyldes punktladningen inne i hulrommet presis kanselleres av den induerte ladningen $-q$ på hulrommets overflate.

Fra utsiden ser vi altså rett og slett en kulesymmetrisk overflateladning, slik at det elektriske feltet utenfor kula blir

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

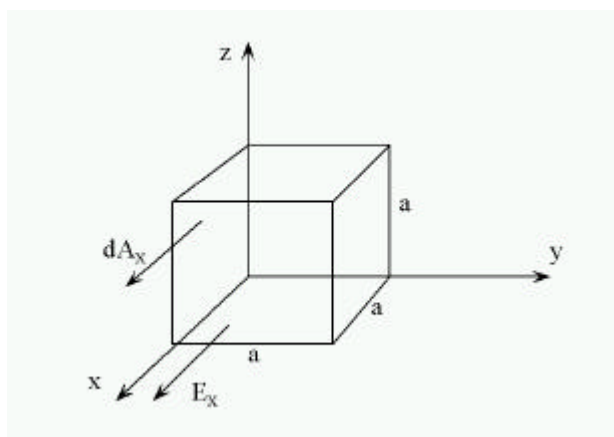
der r er avstanden fra kulas sentrum. Inne i hulrommet blir de elektriske feltlinjene kvalitativt som skissert i figuren nedenfor. Vi har valgt å tegne 8 feltlinjer ut fra punktladningen q . Alle disse ender opp på hulrommets overflate, og slik at de står vinkelrett på overflaten. (OK, litt unøyaktig figur...!) Inne i lederen er $E = 0$, så her har vi ingen feltlinjer. På ytre overflate har vi ladningen q jevnt fordelt utover, så her får vi igjen 8 feltlinjer, radielt rettet utover.



Kommentar: At vi her får induert ladninger $-q$ og q på lederens indre og ytre flate er ikke gjenstand for diskusjon: Det følger av Gauss lov og av at $E = 0$ inne i lederen. Men er det nå så opplagt at disse induerte ladningene fordeler seg presis slik som påstått ovenfor? Vi må

selvsagt oppfylle $E = 0$ inne i lederen, men det er vel ikke umiddelbart opplagt at punktladningen og den induserte ladningen $-q$ skal sørge for dette alene? Er det ikke tenkbart at *begge* de induserte ladningene, $-q$ og q , må bidra for å kansellere feltbidraget fra punktladningen? Svaret er nei, og i hvert fall i ett tilfelle kan vi vel overbevise oss om at det må være slik: La hulrommet med punktladningen ligge dypt inne i en kjempestor ledende kule. Nå er all ladning på den ytre overflaten så langt unna hulrommet at for å oppnå $E = 0$ inne i lederen i nærheten av hulrommet, er ladningen på hulrommets overflate simpelthen nødt til å kansellere feltet fra punktladningen alene! Konklusjonen blir dermed at det er i hvert fall *mulig* å fordele ladningen $-q$ på hulrommets overflate slik at $E = 0$ overalt inne i lederen. Men er dette den *eneste* muligheten, både for store og små kuler? Ja! En har nemlig såkalte *entydighetsteorem* i elektrostatisken som garanterer at en slik mulig ladningsfordeling er den eneste mulige. (Dette er ikke pensum, men den som er interessert kan f.eks. se i D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*, kapittel 3.)

Oppgave 4.



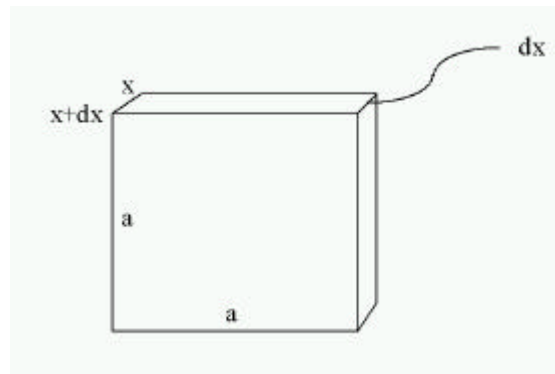
i) $\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} = C \mathbf{i}$ medfører at vi kun har elektrisk fluks gjennom sideflatene som står normalt på x -aksen. Da $E_x = C$ er konstant, har vi samme fluks inn gjennom flaten ved $x = 0$ som vi har ut gjennom flaten ved $x = a$, $\Phi_{\text{inn}} = \Phi_{\text{ut}} = Ca^2$. Dermed blir $\Phi_{\text{tot}} = 0$, og ifølge Gauss lov også $Q = 0$.

ii) $\mathbf{E} = Cx \mathbf{i}$ gir også fluks kun gjennom sideflatene normalt på x -aksen. Nå er imidlertid $\Phi_{\text{ut}}(x=a) = Ca^3$ og $\Phi_{\text{inn}}(x=0) = 0$, slik at $\Phi_{\text{tot}} = Ca^3$, og dermed $Q = \epsilon_0 \Phi_{\text{tot}} = \epsilon_0 Ca^3$.

iii) $\mathbf{E} = Cx^2 \mathbf{i}$ gir fremdeles kun fluks gjennom de samme to sideflatene: $\Phi_{\text{ut}}(x=a) = Ca^4$ og $\Phi_{\text{inn}}(x=0) = 0$, slik at $\Phi_{\text{tot}} = Ca^4$, og dermed $Q = \epsilon_0 \Phi_{\text{tot}} = \epsilon_0 Ca^4$.

iv) $\mathbf{E} = Cy \mathbf{i} + Cx \mathbf{j}$. Nå får vi fluks gjennom i alt fire sideflater, de to som står normalt på x -aksen og de to som står normalt på y -aksen. Men vi ser at E_x ikke er avhengig av x og at E_y ikke er avhengig av y . Dermed må vi ha like stor fluks inn gjennom flaten ved $x = 0$ som ut gjennom flaten ved $x = a$, og tilsvarende like stor fluks inn gjennom flaten ved $y = 0$ som ut gjennom flaten ved $y = a$. Total fluks gjennom den lukkede flaten blir dermed $\Phi_{\text{tot}} = 0$, og altså $Q = 0$.

Ladningstettheten ρ som gir opphav til feltet i tilfelle iii) skal bestemmes på to måter. Vi tar først utgangspunkt i følgende lille volumelement:



Dvs en boks med infinitesimal tykkelse dx lokalisert mellom x og $x+dx$, og med "bredde" og "lengde" a . Med andre ord en liten "slice" av volumet omsluttet av Gaussflaten S ovenfor.

Det elektriske feltet peker i x -retning og er $E(x) = Cx^2$. På flaten ved $x+dx$ er feltet $E(x+dx) = C(x+dx)^2 \approx Cx^2 + 2Cxdx$. (Leddet $C(dx)^2$ kan vi neglisjere i grensen $dx \rightarrow 0$.)

Fluks ut gjennom flaten ved $x+dx$: $\Phi_{\text{ut}} = (Cx^2 + 2Cxdx) a^2 = Cx^2 a^2 + 2Ca^2 x dx$.

Fluks inn gjennom flaten ved x : $\Phi_{\text{inn}} = Cx^2 a^2$.

Total fluks ut gjennom den lille Gaussflaten: $\Phi_{\text{tot}} = 2Ca^2 x dx$.

Ladning inne i volumelementet: $dq = \rho dV = \rho a^2 dx$.

Dermed, med Gauss lov: $2Ca^2 x dx = \rho a^2 dx / \epsilon_0 \Rightarrow \rho = 2Cx\epsilon_0$

Atskillig enklere blir det med bruk av Gauss lov på differensialform:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = 2Cx\epsilon_0$$

Samme svar!