

Løsning øving 5

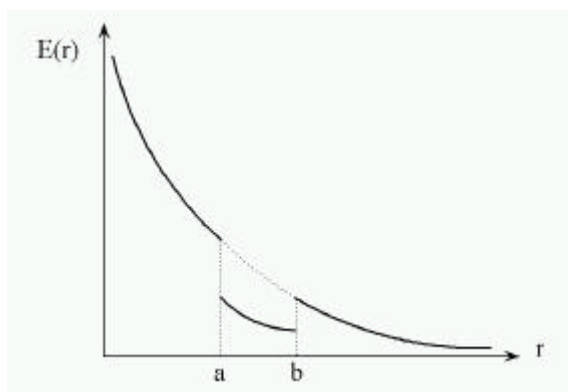
Oppgave 1

a) På grunn av punktladningen i sentrum vil dielektrikumet polariseres. Med $q > 0$ blir resultatet en negativ indust ladning på innsiden, dvs ved $r = a$, og en positiv indust ladning på utsiden, dvs ved $r = b$. På grunn av symmetrien i problemet må dessuten disse industerte ladningene være jevnt fordelt, slik at det elektriske feltet kun blir avhengig av avstanden r fra sentrum. I områdene $r < a$ og $r > b$ kan vi selvsagt bruke Gauss lov for $\mathbf{E}$ -feltet direkte, ettersom vi i begge tilfeller vet hva total nettoladning innenfor en kuleformet Gaussflate er, nemlig q . I området $a < r < b$ kjenner vi imidlertid i utgangspunktet *ikke* total nettoladning innenfor Gaussflaten, ettersom vi ikke vet hvor stor den industerte overflateladningen ved $r = a$ er. Det vi derimot vet, for alle verdier av r , er hvor mye *fri* nettoladning vi har innenfor Gaussflaten. La oss derfor bruke Gauss lov for den elektriske forskyvningen $\mathbf{D} = D(r)\mathbf{e}_r$, og til slutt bestemme $E(r)$ fra sammenhengen $D(r) = \epsilon(r)E(r)$, der $\epsilon(r) = \epsilon_0$ for $r < a$ og $r > b$, og $\epsilon(r) = 2\epsilon_0$ for $a < r < b$.

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = D(r) \cdot 4\pi r^2 = q$$

$$\Rightarrow D(r) = \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$\Rightarrow E(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r < a, \quad r > b \\ \frac{q}{8\pi\epsilon_0 r^2} & a < r < b \end{cases}$$

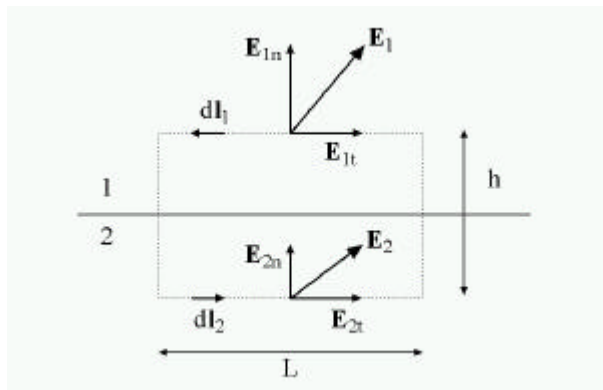


På grunn av polariseringen inne i dielektrikumet reduseres altså det elektriske feltet der til halvparten av hva det ville ha vært uten mediet til stede.

b) Gauss lov for $\mathbf{E}$ -feltet anvendt på ei "Gausskule" inne i dielektrikumet gir nå at $E(r) \cdot 4\pi r^2 = q + q_a$, der q_a er industert ladning på innsiden, ved $r = a$. Setter vi inn det vi fant for $E(r)$ under punkt a), finner vi $q_a = -q/2$, slik at $\sigma(a) = q_a/4\pi a^2 = -q/8\pi a^2$. Videre må industert ladning på utsiden, ved $r = b$, bli $q_b = -q_a = q/2$ (ettersom dielektrikumet er nøytralt), slik at $\sigma(b) = q_b/4\pi b^2 = q/8\pi b^2$.

Oppgave 2.

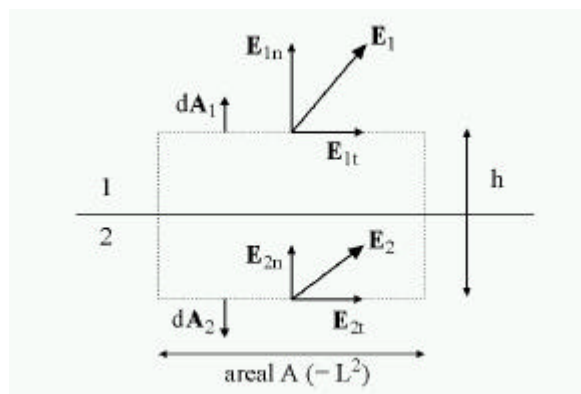
a)



Vi ser først på komponenten av $\mathbf{E}$ tangentielt med grenseflaten. Den ene av Maxwells ligninger sier at kurveintegralet av $\mathbf{E}$ rundt en lukket kurve skal være lik null. Her er vi kun interessert i hva $\mathbf{E}$ er *like over* og *like under* grenseflaten som skiller områdene 1 og 2. Vi kan altså la "høyden" h gå mot null, men da får vi også null bidrag til kurveintegralet fra de to vertikale bitene av det stiplede rektangelet. Bidraget fra den horisontale biten i område 2 blir $E_{2t}L$, ettersom $\mathbf{E}_{2t}$ peker samme vei som vektorelementet $d\mathbf{l}_2$. Bidraget fra den horisontale biten i område 1 blir $-E_{1t}L$, ettersom $\mathbf{E}_{1t}$ her peker motsatt vei av vektorelementet $d\mathbf{l}_1$. Det totale bidraget skal ifølge Maxwell forsvinne, slik at

$$E_{2t}L - E_{1t}L = 0, \text{ og altså: } E_{2t} = E_{1t}$$

Med andre ord: Tangentialkomponenten av $\mathbf{E}$ er kontinuerlig når vi krysser en grenseflate.



Deretter ser vi på komponenten av $\mathbf{E}$ normalt på grenseflaten. Den andre Maxwell-ligningen (dvs Gauss lov) sier at flateintegralet av $\mathbf{E}$ over en lukket flate skal være lik netto ladning innenfor den lukkede flaten dividert med vakuumpermittiviteten ϵ_0 . Igjen er vi interessert i forholdene like over og like under grenseflaten og lar nok en gang h gå mot null. Det betyr at arealet av de fire vertikale sidekantene av den valgte "Gaussboksen" går mot null, så de eneste bidragene til elektrisk fluks gjennom Gaussflaten må bli gjennom "toppløkket" i område 1 og "bunnen" i område 2. Førstnevnte bidrag blir $E_{1n}A$, ettersom $\mathbf{E}_{1n}$ peker samme vei som flatenormalen $d\mathbf{A}_1$. Sistnevnte bidrag blir $-E_{2n}A$, ettersom $\mathbf{E}_{2n}$ peker motsatt vei av flatenormalen $d\mathbf{A}_2$. Med en ladningstetthet σ i grenseflaten, blir total nettoladning innenfor Gaussflaten σA . Gauss lov gir dermed:

$$E_{1n}A - E_{2n}A = \sigma A / \epsilon_0, \text{ og altså: } E_{1n} - E_{2n} = \sigma / \epsilon_0$$

Med andre ord: Normalkomponenten av $\mathbf{E}$ er diskontinuerlig når vi krysser en grenseflate med nettoladning forskjellig fra null.

De to betingelsene kan slås sammen til den oppgitte sammenhengen (*):

$$\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 = \mathbf{n} \sigma / \epsilon_0$$

b) Formen på Gauss lov for $\mathbf{D}$ er akkurat den samme som for $\mathbf{E}$, bortsett fra at "høyre side" er erstattet av q_f , netto *fri* ladning innenfor den valgte Gaussflaten. Utledningen for normalkomponenten til $\mathbf{D}$ blir derfor helt tilsvarende den vi brukte for normalkomponenten av $\mathbf{E}$, og det følger umiddelbart at

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_f$$

med σ_f = tetthet av fri ladning i grenseflaten mellom 1 og 2.

Ettersom total ladning i grenseflaten er summen av fri ladning og bundet ladning (σ_p) knyttet til en eventuell polarisering dersom vi har dielektrika tilstede, dvs $\sigma = \sigma_f + \sigma_p$, følger det da direkte fra definisjonen av elektrisk forskyvning, $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, at normalkomponenten av $\mathbf{P}$ blir diskontinuerlig dersom grenseflaten inneholder netto bundet ladning:

$$\begin{aligned} P_{1n} - P_{2n} &= D_{1n} - D_{2n} - \epsilon_0(E_{1n} - E_{2n}) \\ &= \sigma_f - \epsilon_0 (\sigma/\epsilon_0) \\ &= -\sigma_p \end{aligned}$$

Hva med tangentialkomponenten av $\mathbf{D}$ og $\mathbf{P}$? Kan vi ikke finne grenseflatebetingelser for dem også, på samme måte som vi gjorde for tangentialkomponenten av $\mathbf{E}$? Svaret er nei, og årsaken er at vektorfeltene $\mathbf{D}$ og $\mathbf{P}$ hver for seg *ikke* representerer konservative felt som kan avledes av et skalart potensial. Dermed har vi heller ikke noen Maxwell-ligning som sier at integralet av $\mathbf{D}$ eller $\mathbf{P}$ rundt en lukket kurve skal forsvinne (eventuelt at curl til $\mathbf{D}$ eller curl til $\mathbf{P}$ skal forsvinne hver for seg), slik som vi har for $\mathbf{E}$. Det eneste vi kan si er at tangentialkomponentene til $\mathbf{D}$ og $\mathbf{P}$ må ha *samme* diskontinuitet når en grenseflate krysses:

$$D_{1t} - D_{2t} = P_{1t} - P_{2t}$$

Oppgave 3.

For det første kan vi fastslå at alle involverte vektorer her må peke i samme retning som $\mathbf{E}_0$ på grunn av "symmetrien" i problemet: Det er simpelthen ingenting som skiller "høyre" fra "venstre" her!

Derneft har vi umiddelbart at $\underline{D_0 = \epsilon_0 E_0}$ for den elektriske forskyvningen utenfor plata. Plata er elektrisk nøytral, dvs vi har ingen fri ladning til stede. Dermed har vi også direkte at den elektriske forskyvningen inne i plata blir $\underline{D_1 = D_0 = \epsilon_0 E_0}$ (jfr oppgave 2). Det elektriske feltet E_1 inne i plata bestemmes deretter ved at $D_1 = \epsilon_1 E_1$, dvs $\underline{E_1 = E_0 \epsilon_0 / \epsilon_1}$. Polariseringsen inne i plata blir $P_1 = D_1 - \epsilon_0 E_1 = \underline{\epsilon_0 E_0 (1 - \epsilon_0 / \epsilon_1)}$.

Vi ser av uttrykkene at jo større verdi på platas permittivitet ϵ_1 , jo større blir polariseringen P_1 , og jo mere redusert blir det elektriske feltet E_1 inne i plata.

Dersom plata plasseres *på langs* i det ytre feltet, må vi fremdeles av symmetrigrunner ha både $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{D}_1$ og $\mathbf{P}_1$ pekende i samme retning som $\mathbf{E}_0$. Nå kan vi benytte at tangentialkomponenten av $\mathbf{E}$ skal være kontinuerlig når vi krysser en grenseflate. Det gir $\underline{E_1 = E_0}$. Elektrisk forskyvning inne i plata blir dermed $\underline{D_1 = \epsilon_1 E_1 = \epsilon_1 E_0}$. Med andre ord, det elektriske feltet blir nå like stort inne i plata som utenfor, mens den elektriske forskyvningen blir større inne i plata enn utenfor. Polariseringsen inne i plata blir $\underline{P_1 = D_1 - \epsilon_0 E_1 = (\epsilon_1 / \epsilon_0 - 1) \epsilon_0 E_0}$. Altså større polarisering i dette tilfellet enn med plata på tvers.

Det at $\mathbf{E}$ -feltet blir det samme inni som utenfor med plata på langs kan vel forstås: Siden plata er uendelig stor, ligger hele den induserte overflateladningen uendelig langt unna "der vi er". Dermed merkes heller ikke feltbidraget fra den induserte ladningen, og $\mathbf{E}$ -feltet blir uendret. Med plata på tvers, derimot, induseres en overflateladning på de to uendelig store overflatene som nå ligger i *endelig* avstand fra "der vi er". Dermed settes det opp et indusert elektrisk felt inne i mediet som er motsatt rettet det ytre feltet, og som har samme absoluttverdi over hele

platas tykkelse. Resultatet blir at E-feltet inne i plata blir mindre enn det ytre feltet (men konstant overalt).

Polariseringen P_1 er direkte proporsjonal med det elektriske feltet E_1 inne i plata. Derfor blir polariseringen størst med plata orientert på langs i forhold til det ytre feltet. Det kan kanskje være til hjelp å tenke på følgende måte: La oss starte med plata på tvers. Det ytre feltet E_0 (som peker "oppover") fører til en innretting av mediets dipoler, og dermed en induert overflateladning. Plata blir en elektrisk dipol, med en tilhørende polarisering $P^{(0)}$ (oppover). Den induerte overflateladningen setter opp et elektrisk felt $E^{(1)}$ inne i mediet, motsatt rettet det ytre feltet, altså nedover. $E^{(1)}$ vil i sin tur påvirke mediet, slik at vi får en tilhørende polarisering $P^{(1)}$, mindre enn $P^{(0)}$ i absoluttverdi, og pekende nedover. Til $P^{(1)}$ kan vi i neste omgang assosiere en overflateladning som setter opp et elektrisk felt $E^{(2)}$ i mediet, denne gang pekende oppover. Som igjen påvirker mediet og gir en polarisering $P^{(2)}$ pekende oppover, som igjen fører til et elektrisk felt $E^{(3)}$ pekende nedover, som igjen.... Enden på denne visa er altså at det elektriske feltet inne i plata blir $E_1 = E_0/\epsilon_{r1}$, der $\epsilon_{r1} = \epsilon_1/\epsilon_0$ er platas relative permittivitet, og polariseringen i plata blir $P_1 = (\epsilon_{r1} - 1) \epsilon_0 E_0/\epsilon_{r1}$.

Samme tankegang kan også brukes med plata på langs, men da stopper det hele opp ved $P^{(0)}$, ettersom den induerte overflateladningen assosiert med $P^{(0)}$ blir liggende uendelig langt borte! Dermed blir det induerte "motfeltet" $E^{(1)} = 0$, slik at enden på *denne* visa er rett og slett at $E_1 = E_0$, og dermed $P_1 = (\epsilon_{r1} - 1) \epsilon_0 E_0$.