

Løsning øving 6

Oppgave 1

a) Med kulesymmetrisk ladningsfordeling må det elektriske feltet overalt være radielt rettet, og kun avhengig av avstanden r fra kuleskallenes sentrum. Med dielektrikum til stede bestemmes først den elektriske forskyvningen $D(r)$ i området $a < r < b$ ved hjelp av Gauss lov. (Kuleskall med radius r som Gaussflate, total fri ladning innenfor dette kuleskallet er Q)

$$D(r) \cdot 4\pi r^2 = Q$$

Det elektriske feltet i sjiktet mellom lederne er dermed

$$E(r) = D(r)/\epsilon = Q/4\pi\epsilon r^2,$$

hvoretter potensialforskjellen mellom lederne blir

$$V = V_a - V_b = -\int_b^a E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{Q(b-a)}{4\pi\epsilon ab}$$

Kapasitansen er derfor

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon ab}{(b-a)}$$

Dersom det dielektriske sjiktet er veldig tynt, har vi $a \approx b$, og tilnærmet samme areal $A \approx 4\pi ab \approx 4\pi a^2 \approx 4\pi b^2$ på de to lederne. Dermed, med $d = b - a =$ avstanden mellom lederne, får vi

$$C \approx \epsilon \frac{A}{d}$$

dvs som for en parallellplatekondensator.

b) Betrakter vi en enkelt ledende kule som grensetilfellet $b \rightarrow \infty$ i punkt a), og dessuten lar $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$, har vi

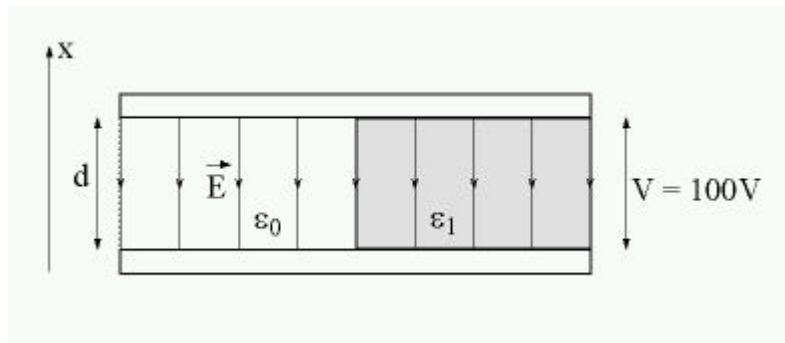
$$C = 4\pi\epsilon_0 a$$

for kapasitansen til en kule med radius a .

Oppgave 2

a) Som tidligere funnet må den elektriske feltstyrken mellom platene være konstant. (Vi ser bort fra randeffekter, dvs vi antar uendelig store plater.) I og med at spenningsforskjellen V og avstanden d er konstant, vil feltstyrken $\vec{E}$ være uavhengig av dielektrikumet mellom platene. Altså (med positiv x-retning oppover):

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} = -\frac{\Delta V}{\Delta x} \hat{x} = -\frac{V}{d} \hat{x} = -\frac{100V}{2mm} \hat{x} = -50 \hat{x} \text{ kV/m}$$

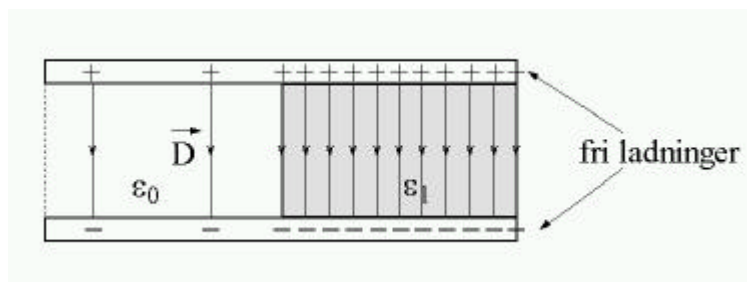


b)

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$$

$$D_{0x} = \epsilon_0 E_x = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{Vm}} \left(-50 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}} \right) = \underline{-0.44 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}}$$

$$D_{1x} = \epsilon_{r1} \epsilon_0 E_x = 4.9 D_{0x} = \underline{-2.2 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}}$$

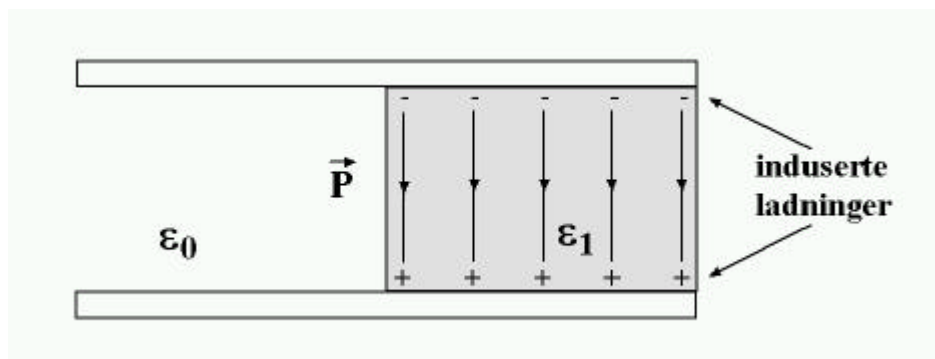


c) Fra $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ finner en:

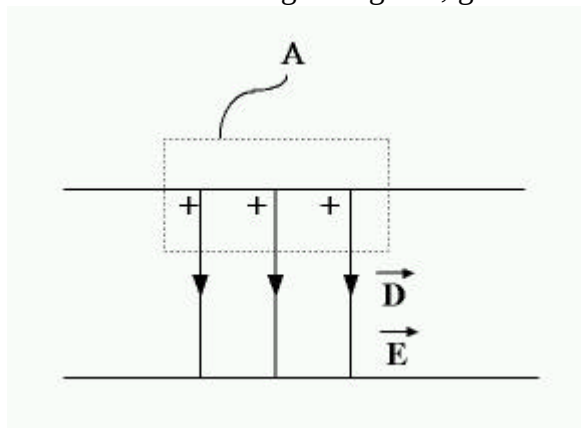
$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \vec{E}$$

$$P_{0x} = (1 - 1) \epsilon_0 E_x = \underline{0}$$

$$P_{1x} = (4.9 - 1) \epsilon_0 E_x = 3.9 D_{0x} = \underline{-1.7 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}}$$



d) Bruk av Gauss lov, med Gaussflate som angitt i figuren, gir:



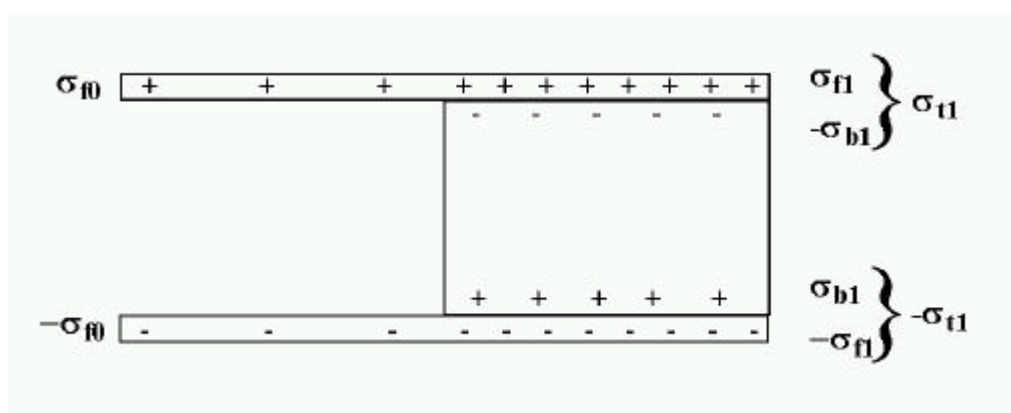
$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = D \cdot A = Q_{in, fri} = A \cdot s_f$$

Dermed blir fri flateladningstetthet: $\sigma_f = \underline{D}$

For vakuum gjelder:

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = e_0 E \cdot A = Q_{in, tot} = A \cdot s_t$$

Dermed blir *total* (netto) flateladningstetthet: $\sigma_t = \underline{\epsilon_0 E}$



De fri ladningene blir:

$$s_{f0} = D_0 = |D_{0x}| = 0.44 \frac{\mu C}{m^2}$$

$$s_{f1} = D_1 = |D_{1x}| = 2.2 \frac{\mu C}{m^2}$$

Total ladning blir:

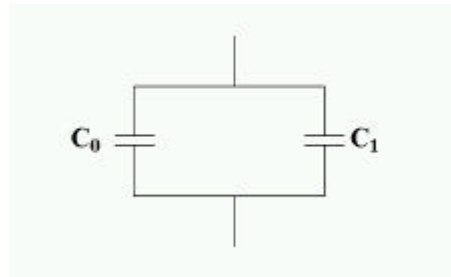
$$s_{t0} = s_{t1} = e_0 |E_x| = |D_{0x}|$$

Bundne ladninger blir dermed (ettersom $\sigma_t = \sigma_f - \sigma_b$, der alle σ -størrelser er definert som *positive*, dvs absoluttverdier):

$$s_{b0} = 0$$

$$s_{b1} = s_{f1} - s_{t1} = |D_{1x}| - |D_{0x}| = (e_r - 1)D_{0x} = 1.7 \frac{\mu C}{m^2}$$

e)



Dette systemet kan betraktes som en parallellkobling av to kapasitanser, den ene med luft mellom kondensatorplatene og den andre med dielektrikumet mellom platene, og hver av dem med areal $A/2$. Har da:

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A/2}{d}$$

$$C_1 = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A/2}{d}$$

som gir (merk at ϵ_0 har dimensjon $[C \cdot d / A] = F \cdot m / m^2 = F/m$):

$$C = C_0 + C_1 = \frac{1 + \epsilon_r}{2} \epsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{1 + 4.9}{2} 8.85 \frac{pF}{m} \frac{10^{-4} m^2}{2 \cdot 10^{-3} m} = \underline{1.3 pF}$$

Det er kanskje verdt å utdype et par ting i forbindelse med denne oppgaven: Det elektriske potensialet V på de to lederplatene er bestemt av den ytre spenningskilden. Det betyr at uansett hva slags kombinasjoner av dielektriske medier vi putter inn mellom de to platene, vil de frie ladningene i lederplatene sørge for å plassere seg slik at potensialet blir det samme på alle steder i en bestemt plate. La oss tenke oss at vi startet med bare luft mellom platene. Da ville vi ha en homogen tetthet av frie ladninger på platene. Når vi så fyller halve rommet mellom platene med en polariserbar isolator, vil det induseres hhv en negativ og positiv ladning i øvre og nedre grenseflate av isolatoren, på grunn av innretting av isolatorens elektriske dipoler i det elektriske feltet mellom platene. Hvis nå ingenting skjedde med de frie ladningene i platene, ville vi få et redusert elektrisk felt gjennom dielektrikumet, og følgelig en redusert potensialforskjell mellom platene i høyre halvdel. For å opprettholde samme potensial overalt på en gitt plate, må spenningskilden derfor sørge for å tilføre ekstra ladning til platenes høyre halvdel, og i en slik mengde at summen av fri ladning og indusert ladning på høyre side blir lik den frie ladningen på venstre side (hvor vi ikke har noen indusert ladning). Resultatet blir dermed at det elektriske feltet $\mathbf{E}$ forblir konstant mellom platene, mens den elektriske forskyvningen $\mathbf{D}$ blir større i det dielektriske mediet, på grunn av

polariseringen **P**. En må forvente at spenningskilden ikke vil tilføre denne ekstra ladningsmengden aldeles "gratis", og det stemmer: Med bare luft mellom platene ville total energi lagret i kondensatoren ha vært (se forelesningene, 25.11) $U_0 = 2 \cdot (1/2) C_0 V^2 = C_0 V^2 = 2.2 \cdot 10^{-9} \text{ J}$, mens vi nå har $U = (1/2) C_0 V^2 + (1/2) C_1 V^2 = 6.5 \cdot 10^{-9} \text{ J}$. [Alternativt kan energien beregnes ved å ta utgangspunkt i energitettheten $u_E = (1/2) \epsilon E^2$, som gir $U = (1/2) A d (1/2) \epsilon_0 E^2 + (1/2) A d (1/2) \epsilon_1 E^2 = (1/4) A d \epsilon_0 E^2 (1 + \epsilon_{r1}) = 0.25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} (\text{C/Vm}) \cdot (50 \cdot 10^3)^2 (\text{V}^2/\text{m}^2) \cdot (1 + 4.9) = 6.5 \cdot 10^{-9} \text{ J}$]

Oppgave 3

- a) Motstand i de to Al-trådene tilsammen: $R = L / \sigma A = 0.60 \text{ m} / (3.54 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1} \cdot 10^{-6} \text{ m}^2) = 0.017 \Omega$.

Total motstand i Al-tråder og resistor: 10.017Ω .

$\Rightarrow$ Spenningsfall over Al-trådene (tilsammen): $V_{\text{Al-tråd}} = 1.5 \text{ V} (0.017 / 10.017) = \underline{2.5 \text{ mV}}$

Spenningsfall over resistoren: $V_R = 1.5 \text{ V} (10 / 10.017) = \underline{1.497 \text{ V}}$

- b) Strømstyrke: $I = V / R_{\text{tot}} = 1.5 \text{ V} / 10.017 \Omega = 0.1497 \text{ A} \approx \underline{0.15 \text{ A}}$.

Utviklet effekt: $P = V I = 1.5 \text{ V} \cdot 0.15 \text{ A} = 0.225 \text{ W} \approx \underline{0.23 \text{ W}}$.

- c) Strømtetthet: $j = I / A = 0.15 \text{ A} / 10^{-6} \text{ m}^2 = 150000 \text{ A/m}^2$.

Antallstetthet av elektroner: $n = n_{\text{Al}} = (2700 \text{ kg/m}^3 / 26.98 \cdot 10^{-3} \text{ g/mol}) \cdot 6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} = 6 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

Midlere driftshastighet: $j = nev \Rightarrow v = j/ne = \underline{1.56 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}}$.

Midlere termiske hastighet bestemt av $E_{\text{kin}} = mv^2/2 = 3k_B T/2$

$\Rightarrow v = (3 k_B T/m)^{1/2} \approx \underline{10^5 \text{ m/s}}$.

Oppgave 4

- a) Energi som må lagres:

$$U = \frac{700 \text{ W} \cdot 0.005 \text{ s}}{0.90} = \underline{3.89 \text{ J}}$$

- b) Energi på kondensatoren: $U = \frac{1}{2} C V^2$
som betyr at spenningen må være:

$$V = \sqrt{\frac{2U}{C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3.89 \text{ J}}{0.8 \cdot 10^{-3} \text{ F}}} = \underline{98.6 \text{ V}}$$

(Enheter: $\text{J/F} = (\text{VC})/(\text{C/V}) = \text{V}^2$)