

Løsning øving 7

Oppgave 1

a) Strømloven anvendt på knutepunktet der strømmen I_1 kommer inn:

$$-I_1 - I_3 + I_2 = 0 \quad (1)$$

(fortegnskonvensjon: positiv strømreretning *ut av* et knutepunkt) Det andre knutepunktet, der I_1 går ut, gir samme ligning med motsatt fortegn, dvs *ikke* en ligning som er lineært uavhengig av (1). Vi må derfor bruke spenningsloven for å stable på bena ytterligere to ligninger. Spenningsfall med urviseren rundt sløyfa som går gjennom motstandene R_1 , R_3 og R_2 , og kildene E_1 og E_2 (vi kan f.eks. starte til venstre for R_1):

$$-E_2 + R_3 I_2 + R_2 I_1 - E_1 + R_1 I_1 = 0 \quad (2)$$

Spenningsfall med urviseren rundt sløyfa som går gjennom motstandene R_1 , R_4 og R_2 , og kildene E_1 og E_3 (vi kan f.eks. starte til venstre for R_1):

$$-I_3 R_4 + E_3 + R_2 I_1 - E_1 + R_1 I_1 = 0 \quad (3)$$

Nå har vi 3 uavhengige ligninger, og det er tilstrekkelig for å bestemme de 3 ukjente strømmene I_1 , I_2 og I_3 . Vi kunne i tillegg ha brukt spenningsloven på sløyfa som går gjennom motstandene R_3 og R_4 og kildene E_2 og E_3 , men det ville ikke ha gitt oss noen ny informasjon, men en ligning som er en lineær kombinasjon av (2) og (3). Imidlertid kunne denne ligningen ha vært brukt *istedetfor* (2) eller (3).

Ligning (3) gir nå f.eks. I_3 uttrykt ved I_1 :

$$I_3 = \frac{R_1 + R_2}{R_4} I_1 + \frac{1}{R_4} (E_3 - E_1) \quad (4)$$

mens ligning (2) gir I_2 uttrykt ved I_1 :

$$I_2 = -\frac{R_1 + R_2}{R_3} I_1 + \frac{1}{R_3} (E_2 + E_1) \quad (5)$$

Disse uttrykkene kan vi nå sette inn i ligning (1) og bestemme I_1 :

$$I_1 = -I_3 + I_2 = -\frac{R_1 + R_2}{R_4} I_1 - \frac{1}{R_4} (E_3 - E_1) + \frac{1}{R_3} (E_2 + E_1)$$

som gir:

$$I_1 = \left(1 + \frac{R_1 + R_2}{R_4} + \frac{R_1 + R_2}{R_3} \right)^{-1} \left(\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) E_1 + \frac{1}{R_3} E_2 - \frac{1}{R_4} E_3 \right) \quad (6)$$

Innsetting av tallverdier:

$$I_1 = (1 + 16/4 + 16/12)^{-1} (25/3 + 5/12 - 5/4) A = \underline{45/38 A \approx 1.18 A}$$

Til slutt kan vi sette inn for I_1 i (5) og (4) og bestemme I_2 og I_3 :

$$I_2 = - (16/12)(45/38) + 30/12 = \underline{35/38 A \approx 0.92 A}$$

$$I_3 = (16/4)(45/38) - 20/4 = \underline{-10/38 A \approx -0.26 A}$$

Dette betyr at positiv strømretning blir slik som vi har valgt i figuren for I_1 og I_2 , men motsatt for I_3 . En sjekk på at vi har regnet riktig er at strømverdiene oppfyller strømloven, ligning (1).

b) Også her har vi tre ukjente strømstyrker, og på samme måte som i a) kan vi bruke Kirchhoffs strømlov på f.eks. knutepunktet øverst på midten og spenningsloven på to av de tre mulige lukkede sløyfene i kretsen, og slik få tre uavhengige ligninger som gjør oss i stand til å løse ut for strømmene I_1 , I_2 og I_3 .

Alternativt kan en ved å betrakte figuren se at kretsen i denne oppgaven er identisk med den i oppgave a) bare vi foretar følgende erstatninger i de ulike ligningene:

$$R_1 + R_2 \rightarrow R_{i1} + R_1$$

$$I_1 \rightarrow I_1$$

$$E_1 \rightarrow E_1$$

$$R_4 \rightarrow R_{i2} + R_2$$

$$I_3 \rightarrow I_2$$

$$E_3 \rightarrow E_2$$

$$R_3 \rightarrow R_{i3}$$

$$I_2 \rightarrow I_3$$

$$E_2 \rightarrow E_3$$

Dermed har vi for strømstyrkene:

$$I_1 = \left(1 + \frac{R_{i1} + R_1}{R_{i2} + R_2} + \frac{R_{i1} + R_1}{R_{i3}} \right)^{-1} \left(\left(\frac{1}{R_{i3}} + \frac{1}{R_{i2} + R_2} \right) E_1 + \frac{1}{R_{i3}} E_3 - \frac{1}{R_{i2} + R_2} E_2 \right)$$

$$I_2 = \frac{R_{i1} + R_1}{R_{i2} + R_2} I_1 + \frac{1}{R_{i2} + R_2} (E_2 - E_1)$$

$$I_3 = -\frac{R_{i1} + R_1}{R_{i3}} I_1 + \frac{1}{R_{i3}} (E_3 + E_1)$$

Med oppgitte tallverdier får en:

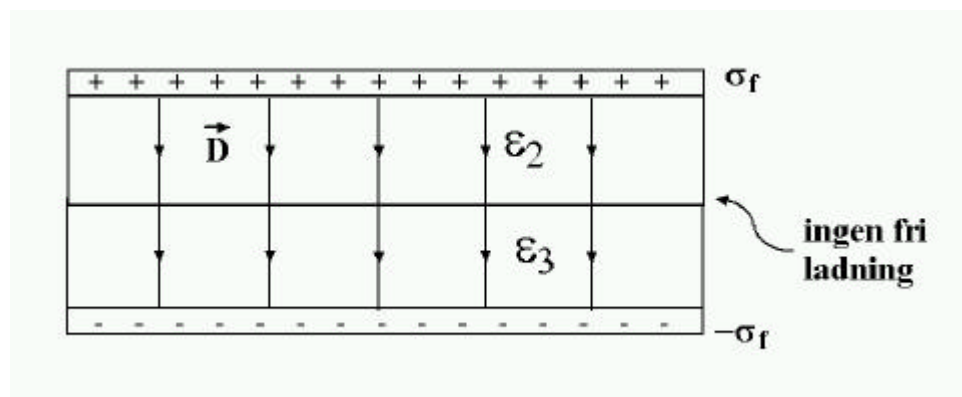
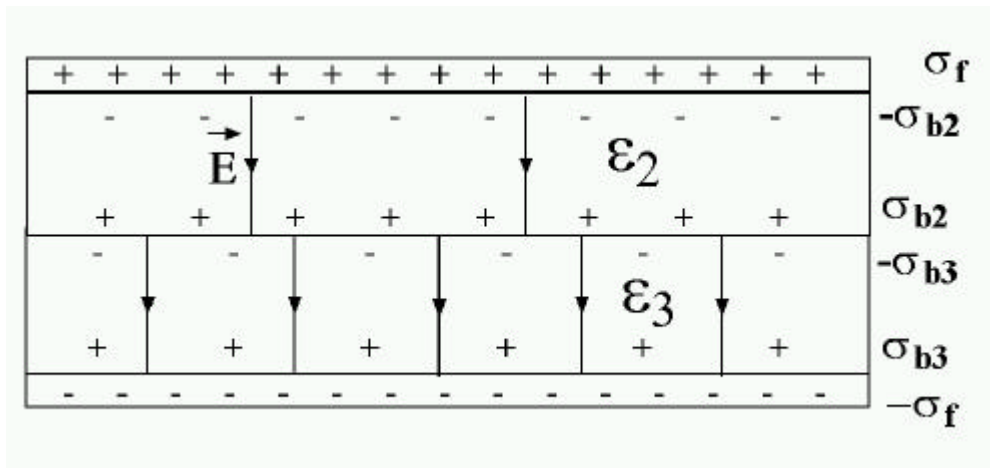
$$I_1 = \underline{3A} \quad I_2 = \underline{2A} \quad I_3 = \underline{5A}$$

Her ble positiv strømretning som valgt i figuren for alle tre strømstyrkene.

Merk at R_1 og R_2 i alle uttrykk opptrer i kombinasjonen $(R_1 + R_2)$ i oppgave a). Det er nettopp hva vi har vist i forelesningene for seriekoblede motstander. Vi har helt tilsvarende kombinasjonene $R_{i1} + R_1$ og $R_{i2} + R_2$ i oppgave b).

Merk også at med alle spenningsverdier i V og motstandsverdier i Ω vil alle ledd i strømutftrykkene få dimensjon A.

Oppgave 2



Det er umiddelbart klart at $D_2 = D_3 = \sigma_f$ (= fri flateladningstetthet på metallplatene). Vi kan finne en sammenheng mellom potensialforskjellen V og σ_f :

$$V = E_2 \frac{d}{2} + E_3 \frac{d}{2} = \left(\frac{D_2}{\epsilon_{r2} \epsilon_0} + \frac{D_3}{\epsilon_{r3} \epsilon_0} \right) \frac{d}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_{r2}} + \frac{1}{\epsilon_{r3}} \right) \frac{\sigma_f d}{\epsilon_0}$$

Dette gir for σ_f :

$$\sigma_f = \left(\frac{1}{\epsilon_{r2}} + \frac{1}{\epsilon_{r3}} \right)^{-1} 2\epsilon_0 \frac{V}{d} = 1.35 \frac{\text{mC}}{\text{m}^2}$$

Da er det lett å regne ut forskyvningen D og det elektriske feltet E i de to mediene:

$$D_{2x} = D_{3x} = -\sigma_f = -1.35 \frac{\text{mC}}{\text{m}^2}$$

$$E_{2x} = \frac{D_{2x}}{\epsilon_{r2} \epsilon_0} = -27 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

$$E_{3x} = \frac{D_{3x}}{\epsilon_{r3} \epsilon_0} = -73 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

Polariseringen $\mathbf{P}$ finner vi deretter fra sammenhengen $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$:

$$P_{2x} = (e_{r2} - 1)e_0 E_{2x} = -1.1 \frac{mC}{m^2}$$

$$P_{3x} = (e_{r3} - 1)e_0 E_{3x} = -0.71 \frac{mC}{m^2}$$

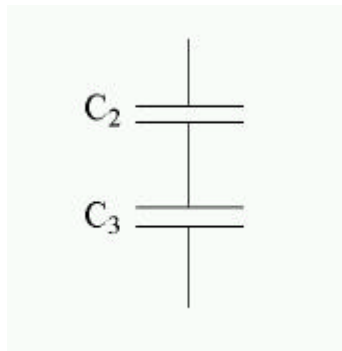
Bunden flateladningstetthet σ_b får vi fra $\sigma_b = \sigma_f - \sigma_t = D - \epsilon_0 E = P$ (igjen med alle σ -størrelser definert som *positive*, som vi gjorde i oppgave 2 i Øving 6):

$$s_{b2} = |P_{2x}| = 1.1 \frac{mC}{m^2}$$

$$s_{b3} = |P_{3x}| = 0.71 \frac{mC}{m^2}$$

[Med *positiv* (fri) ladning på øvre plate og *negativ* ladning på nedre plate, er det åpenbart at vi får induert en *negativ* bunden ladning $-\sigma_{b2}$ i øvre grenseflate av medium 2, en *positiv* bunden ladning σ_{b3} i nedre grenseflate av medium 3, og dermed *positiv* ladning σ_{b2} i nedre grenseflate av medium 2 og *negativ* ladning $-\sigma_{b3}$ i øvre grenseflate av medium 3. Husk at mediene mellom platene er nøytrale, så induert ladning i den ene overflaten må gjenfinnes med motsatt fortegn i den andre overflaten av et gitt medium.

Videre har vi at graden av polarisering er uttrykt gjennom verdien på den relative permittiviteten. Det er derfor rimelig at P_{2x} blir større enn P_{3x} . Dermed blir det elektriske feltet tilsvarende sterkere i medium 3 enn i medium 2.]



Total kapasitans C blir som for to kondensatorer i serie:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

med

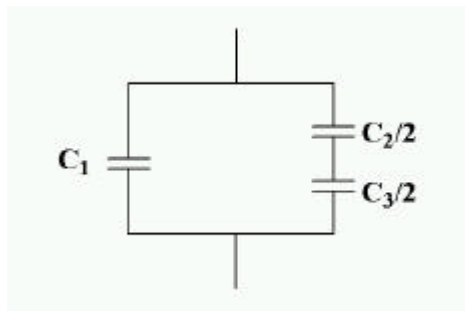
$$C_2 = e_{r2} e_0 \frac{A}{d/2} \text{ og } C_3 = e_{r3} e_0 \frac{A}{d/2}$$

Dermed :

$$C = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \frac{2e_{r2} e_{r3}}{e_{r2} + e_{r3}} e_0 \frac{A}{d} = \underline{1.4 \text{ pF}}$$

Oppgave 3

Total kapasitans blir som for følgende oppkobling:



Altså, C_1 parallellkoblet med en seriekobling av $C_2/2$ og $C_3/2$ (med faktorer $\frac{1}{2}$ pga halvt areal i forhold til oppgave 2):

$$C = C_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} \right) = \underline{1.8 \text{ pF}}$$

Alternativt kunne vi ha brukt σ_{f1} og σ_f fra hhv oppgave 2 i Øving 6 og oppgave 2 i denne øvingen, og beregnet total fri ladning:

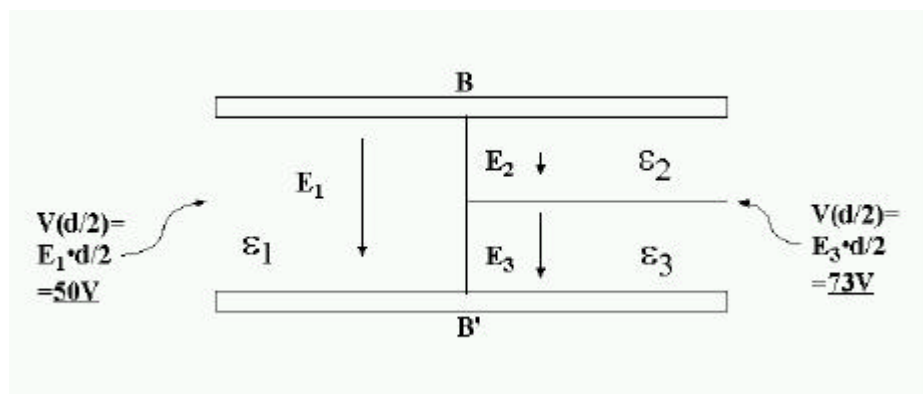
$$Q = \frac{1}{2} A \sigma_{f1} + \frac{1}{2} A \sigma_f = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot (1.35 + 2.2) \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2 = 178 \text{ pC}, \text{ som gir kapasitansen}$$

$$C = Q/V = 178 \text{ pC} / 100 \text{ V} \approx \underline{1.8 \text{ pF}}.$$

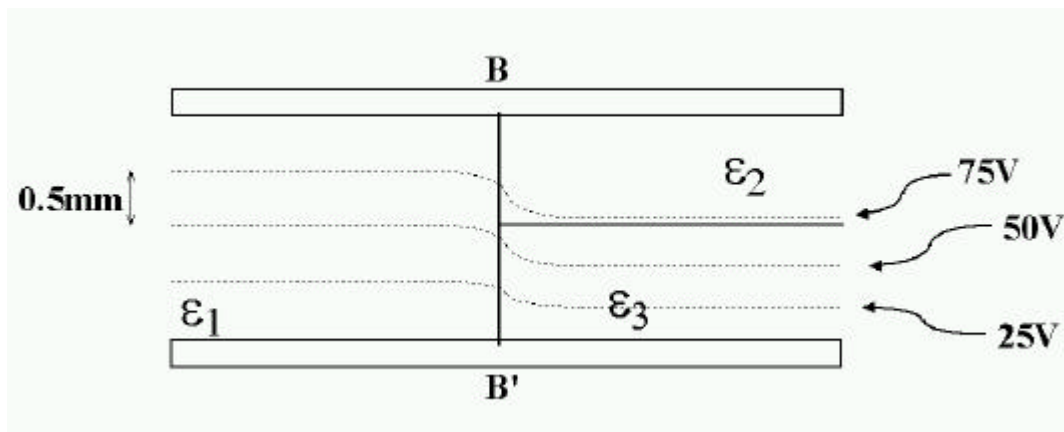
Hvis vi først regner ut potensialet midt mellom øvre og nedre plate, både "et stykke" til venstre og til høyre for midtlinjen BB' , finner vi (med $V=100\text{V}$ på øvre plate og $V=0\text{V}$ på nedre plate)

$$V_v(d/2) = E_1 \cdot d/2 = 50 \text{ kV/m} \cdot 0.001 \text{ m} = 50 \text{ V til venstre, og}$$

$$V_h(d/2) = E_3 \cdot d/2 = 73 \text{ kV/m} \cdot 0.001 \text{ m} = 73 \text{ V til høyre.}$$



Det er da f.eks. klart at ekvipotensialflaten for 50V må ligge et stykke nedenfor midten i høyre del av kondensatoren. Følgelig må ekvipotensialflatene for 25, 50 og 75V bli seende omtrent slik ut:



Til venstre har vi et potensial på 25, 50 og 75V (i forhold til nedre plate) i avstand hhv 0.5, 1.0 og 1.5 mm fra nedre plate. Til høyre blir xposisjonen til potensialnivåene 25 og 50 V bestemt av

$V = E_3 \cdot x$, dvs:

$$x(25V) = 25V/(73kV/m) = \underline{0.34 \text{ mm}}$$

$$x(50V) = 50V/(73kV/m) = \underline{0.68 \text{ mm}}$$

(begge målt fra nedre plate) mens 75V-nivået blir liggende like over grenseflaten mellom medium 2 og 3, så målt i avstand fra øvre plate: $x'(75V) = (100V-75V)/(27kV/m) = 0.93 \text{ mm}$. Dermed, målt i avstand fra nedre plate:

$$x(75V) = \underline{1.07 \text{ mm}}$$

Av formen på de skisserte ekvipotensialflatene ser vi at det elektriske feltet må ha en horisontal komponent når vi er i nærheten av midtlinjen BB', ettersom $\mathbf{E} = -\nabla V$ står normalt på ekvipotensialflatene. Dette er da også helt rimelig, hvis vi tenker på betingelsen (jfr Øving 5, oppgave 2) at når en grenseflate krysses, skal tangentialkomponenten av det elektriske feltet, E_t , være kontinuerlig. Hvis $\mathbf{E}$ -feltet *ikke* hadde hatt en horisontal komponent, dvs en komponent normalt på delelinjen BB', hadde vi til venstre for BB' hatt tangentialkomponenten $E_t = E_{1x}$, og til høyre for BB' enten $E_t = E_{2x}$ (øverste halvdel) eller $E_t = E_{3x}$ (nederste halvdel). Men det ville stride mot kontinuerlig E_t , ettersom E_{1x} er forskjellig fra både E_{2x} og E_{3x} !

Det er antagelig (?) ikke mulig å finne en enkel analytisk løsning for hele dette problemet, dvs enkle matematiske uttrykk som også beskriver "overgangssonen" i nærheten av BB'. I alle tilfelle ville løsningen være bestemt av: $\text{div } \mathbf{D} = 0$ (ingen frie ladninger noe sted i området mellom metallplatene!), $\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{E} = -\nabla V$, samt de ulike grensebetingelsene for potensialet V .