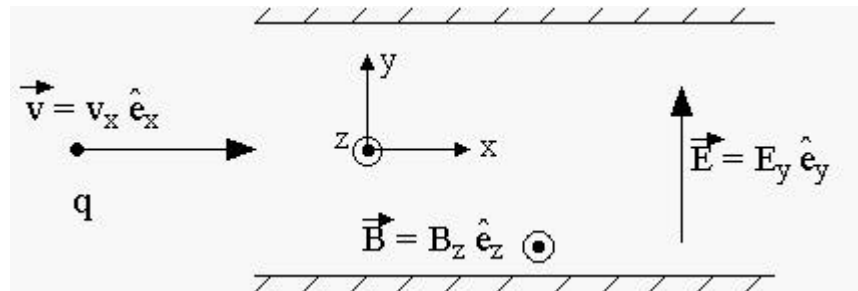


Løsning øving 8

Oppgave 1



Resulterende kraft er lik null hvis partiklene ikke avbøyes. For Lorentzkraften har en da:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 0$$

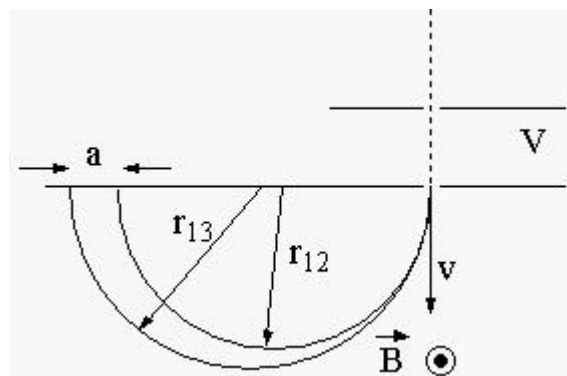
$$\Rightarrow F_y = q(E_y - v_x B_z) = 0$$

$$\Rightarrow v_x = E_y / B_z = (V / d) / B_z = (300\text{V} / 0.020\text{m}) / 0.10\text{T} = \underline{1.5 \cdot 10^5 \text{ m/s}}$$

$$(1\text{T} = 1\text{Vs/m}^2.)$$

Oppgave 2

a)



Kraftbalanse:

$$F = m \frac{v^2}{r} = qvB$$

$$\Rightarrow r = \frac{mv}{qB}$$

Hastigheten er bestemt av kinetisk energi, som igjen er bestemt av endringen i potensiell energi. Dvs:

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} \quad \text{slik at}$$

$$r = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2Vm}{q}}$$

Altså er baneradien proporsjonal med $m^{1/2}$, og dermed har vi

$$r_{13} = r_{12} \sqrt{\frac{m_{13}}{m_{12}}} \quad \text{og følgelig} \quad a = 2(r_{13} - r_{12}) = 2r_{12} \left(\sqrt{\frac{m_{13}}{m_{12}}} - 1 \right)$$

Da kan vi bestemme de to baneradiene:

$$r_{12} = \frac{1}{2} a \left(\sqrt{\frac{m_{13}}{m_{12}}} - 1 \right)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot 10.0 \text{ mm} \left(\sqrt{\frac{13}{12}} - 1 \right)^{-1} = \underline{122 \text{ mm}}$$

$$r_{13} = r_{12} \sqrt{\frac{m_{13}}{m_{12}}} = 122 \text{ mm} \sqrt{\frac{13}{12}} = \underline{127 \text{ mm}}$$

Nødvendig magnetfelt blir:

$$B = \frac{1}{r_{12}} \sqrt{\frac{2Vm_{12}}{q}} = \frac{1}{0.122 \text{ m}} \sqrt{\frac{2 \cdot 1.5 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot 12 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}}} = \underline{0.158 \text{ T}}$$

b) Ved å differensiere uttrykket for r med hensyn på V finner en:

$$\Delta r = \frac{\partial r(V)}{\partial V} \Delta V = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m}{q}} \frac{1}{2\sqrt{V}} \Delta V = \frac{r}{2V} \Delta V$$

For hvert partikkelslag separat blir da spredningen i a :

$$\Delta a = 2 |\Delta r| = r \frac{|\Delta V|}{V} \quad \text{der } r \text{ er } r_{12} \text{ eller } r_{13}$$

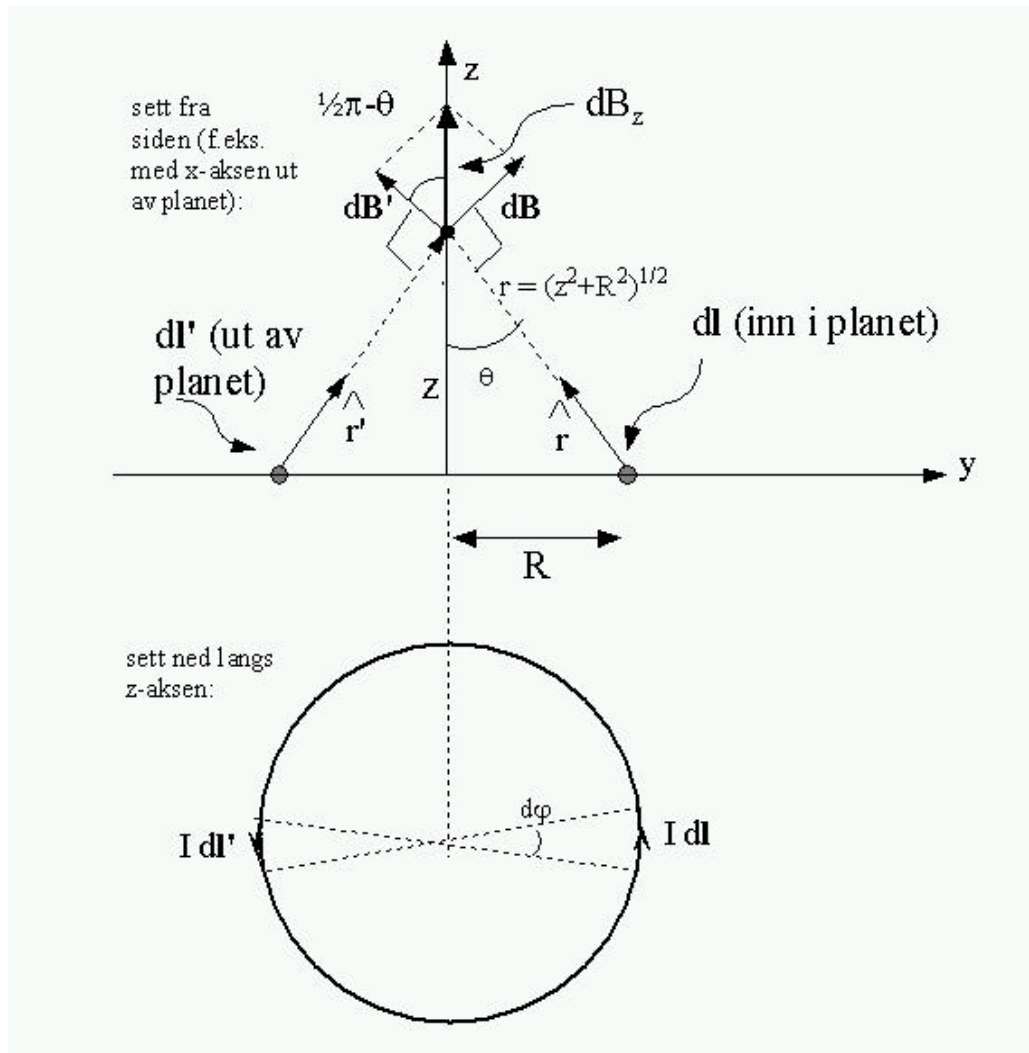
Oppgave 3

[Dette eksempelet er omhandlet i Alonso & Finn 24.13]

La oss ta utgangspunkt i en figur (se neste side).

a) Lederstykket $d\mathbf{l}$ krysser y -aksen, med retning inn i planet, og gir bidraget $d\mathbf{B}$ til magnetfeltet i avstand z fra xy -planet (på z -aksen). Retningen på $d\mathbf{B}$ er gitt av $d\mathbf{l} \times \hat{r}$, og står altså normalt på både $d\mathbf{l}$ og $\hat{r}$, og danner en vinkel $\frac{1}{2}\pi - \theta$ med z -aksen når $\hat{r}$ danner en vinkel θ med z -aksen. På diametralt motsatt side av strømsløyfa kommer strømmen ut av planet, slik at lederstykket $d\mathbf{l}'$ krysser y -aksen med retning ut av planet. På z -aksen gir dette lederstykket et bidrag $d\mathbf{B}'$ til magnetfeltet, der $d\mathbf{B}'$ må ha samme absoluttverdi som $d\mathbf{B}$, men med retning slik at $d\mathbf{B} + d\mathbf{B}' = d\mathbf{B}_z$ blir en vektor med retning langs z -aksen. Slik kan vi fortsette rundt hele strømsløyfa og se på par av diametralt motsatte lederstykker som hele tiden vil adderes til vektorer med retning langs z -aksen. Følgelig må det totale magnetfeltet $\mathbf{B}$ også ha retning langs z -aksen.

b) Vektorproduktet $d\mathbf{l} \times \hat{r}$ vil fremdeles ha en *positiv* z-komponent dersom vi flytter ”observasjonspunktet” fra z til $-z$, og det samme vil gjelde for $d\mathbf{l}' \times \hat{r}'$. Derfor vil $\mathbf{B}(z)$ og $\mathbf{B}(-z)$ peke i *samme* retning.



c) Biot-Savarts lov gir bidraget til magnetfeltet fra lederstykket $d\mathbf{l}$:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Ettersom $d\mathbf{l} \perp \hat{r}$ og $|\hat{r}| = 1$, har vi

$$dB = |d\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^2} dl$$

I punkt a) argumenterte vi for at x- og y-komponentene kansellerer når vi integrerer rundt hele strømsløyfa, så vi trenger kun å bestemme z-komponenten av $d\mathbf{B}$:

$$dB_z = dB \cos\left(\frac{\pi}{2} - q\right) = dB \sin q = dB \frac{R}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{r^3} dl$$

Her er hele faktoren foran dl uavhengig av hvor på strømsløyfa elementet dl befinner seg, slik at integrasjonen for å bestemme det totale magnetfeltet blir svært enkelt:

$$B(z) = \int dB_z = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3} \oint dl = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} R d\phi = \frac{\mu_0 IR^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

som skulle vises.

d) I stor avstand fra strømsløyfa kan vi til ledende orden sette $z^2 + R^2 \approx z^2$. Arealet omsluttet av strømsløyfa er πR^2 , og flatenormalen peker langs z-aksen, dvs i samme retning som **B**.

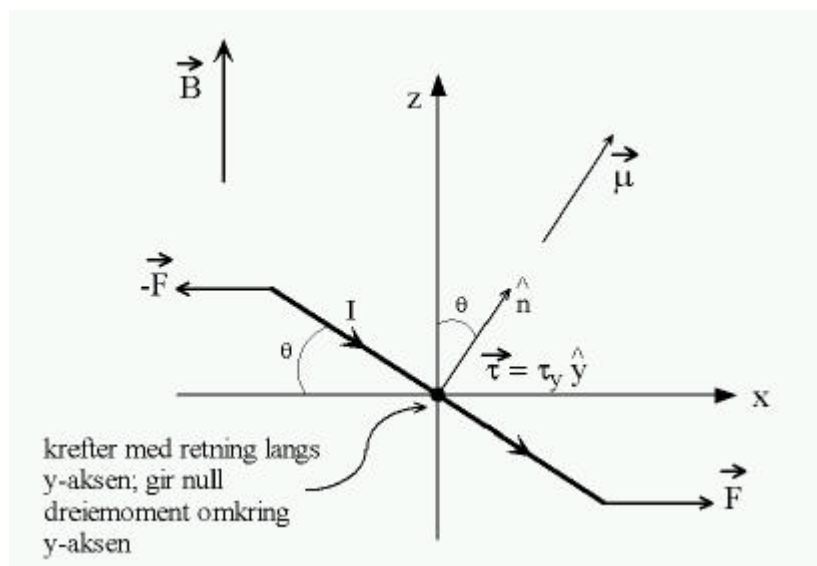
Strømsløyfas magnetiske moment er dermed $\mu = I\pi R^2 \hat{z}$, og B(z) for $z \gg R$ uttrykt ved μ blir:

$$B(z) = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi z^3}$$

(Nok en gang: Ikke la deg forvirre av notasjonen her. $\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am er vakuumpermeabiliteten, mens $\mu = I\pi R^2$ er strømsløyfas magnetiske moment, med enhet Am².)

Her kan det være verdt å sammenligne med det elektriske feltet fra en elektrisk dipol, på aksen til dipolmomentet **p**, og i lang avstand fra dipolen (Øving 3, oppgave 1b, tilfellet $\theta=0$): $E(z) = p/(2\pi\epsilon_0 z^3)$. Altså nøyaktig samme form, med p istedetfor μ , og med $1/\epsilon_0$ istedetfor μ_0 . Legg merke til at feltene i begge tilfelle faller av som $1/z^3$. Det er vel rimelig at det elektriske feltet fra en elektrisk dipol faller av raskere enn feltet fra en elektrisk "monopol", dvs en enkelt ladning: Bidraget til det totale feltet fra de to ladningene har motsatt fortegn og tenderer til å kansellere hverandre. Den lukkede strømsløyfa representerer en *magnetisk dipol*. Magnetiske monopoler ser ikke ut til å eksistere i naturen.

Oppgave 4



Strømmene parallelt med xz-planet vil gi to motsatt rettede krefter i y-retningen, og disse vil ikke gi noe dreiemoment ($\mathbf{r} \parallel \mathbf{F}$). Strømmene parallelt med y-aksen vil gi et kraftpar **F** og **-F** som tilsammen gir et dreiemoment (om y-aksen):

$$t_y = 2F \frac{a}{2} (-\sin q) = -Fa \sin q$$

($t = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ blir vektor som peker ut av planet, dvs langs negativ y-akse, hvilket betyr at strømsløyfa ville begynne å rotere mot klokka i xz-planet. Derfor negativt fortegn på τ_y)

Kraften på grunn av strømmen i positiv y-retning er:

$$\vec{F} = I(a\hat{y} \times B\hat{z}) = aIB\hat{x}$$

Dermed kan vi uttrykke dreiemomentet ved hjelp av det magnetiske momentet $m = Ia^2 \hat{n}$ og magnetfeltet $\mathbf{B} = B \hat{z}$:

$$t_y = -aIBa \sin q = -mB \sin q$$

eller på vektorform:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

som skulle vises.