Institutt for fysikk, NTNU
Fag SIF 4012 Elektromagnetisme og
MNFFY 103 Elektrisitet og magnetisme
Høst 2002

Løsning øving 9

Oppgave 1
Kartesiske koordinater:
Enhetsvektoren $\hat{j}$ står normalt på **r**, som danner en vinkel φ med x-aksen. Det betyr at $\hat{j}$ danner en vinkel φ med y-aksen og en vinkel π/2 + φ med x-aksen, hvilket igjen betyr at vi kan skrive $\hat{j} = \cos j\,\hat{y} - \sin j\,\hat{x}$. Dermed:

$$\vec{B}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{m_0 I_0}{2pR^2} r\hat{j} = \dfrac{m_0 I_0}{2pR^2}\left(r\cos j\,\hat{y} - r\sin j\,\hat{x}\right) = \dfrac{m_0 I_0}{2pR^2}\left(x\hat{y} - y\hat{x}\right) & r < R \\ \dfrac{m_0 I_0}{2p}\dfrac{1}{r}\hat{j} = \dfrac{m_0 I_0}{2p}\left(\dfrac{r\hat{j}}{r^2}\right) = \dfrac{m_0 I_0}{2p}\left(\dfrac{x\hat{y} - y\hat{x}}{x^2+y^2}\right) & r > R \end{cases}$$

Da er det bare å sette i gang:

$$\nabla\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{cases} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} \dfrac{m_0 I_0}{2pR^2} = \dfrac{m_0 I_0}{2pR^2}(1+1)\hat{z} = m_0\dfrac{I_0}{pR^2}\hat{z} & r < R \\ \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} \dfrac{m_0 I_0}{2p} = \dfrac{m_0 I_0}{2p}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\hat{z} = 0 & r > R \end{cases}$$

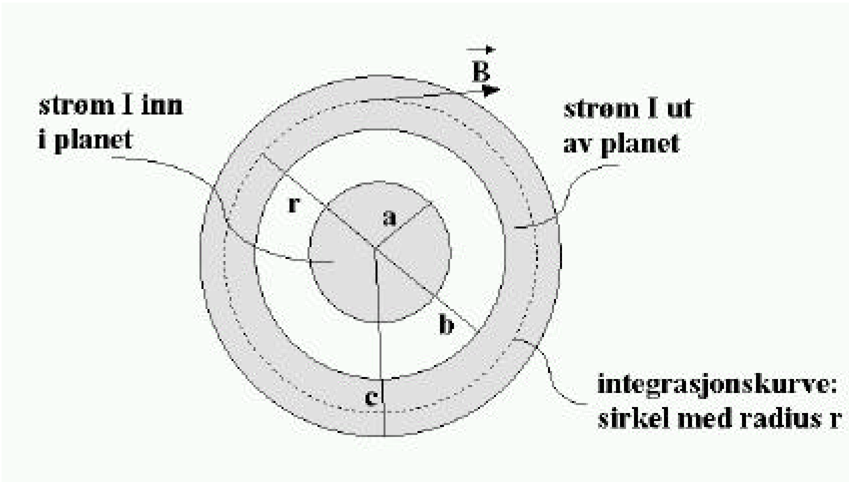
Altså: $\vec{j} = \dfrac{I_0}{pR^2}\hat{z}$ inne i lederen og $\vec{j} = 0$ utenfor lederen, og det var nettopp den strømtettheten vi tok utgangspunkt i for å bestemme $\vec{B}(r)$.

Sylinderkoordinater:
Curl til en vektor i sylinderkoordinater finner jeg under kapitlet "Koordinatensysteme" i min utgave av Rottmann. I vårt tilfelle har vektoren **B** kun retning langs $\hat{j}$ og er kun avhengig av avstanden fra z-aksen, r. Eneste mulige ledd som kan bli forskjellig fra null er derfor slike som involverer φ-komponenten av **B**, og i tillegg derivert mhp r. Det finnes ett slik ledd, og det gir et bidrag til z-komponenten av curl **B**:

$$\nabla\times\vec{B} = \hat{z}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_j) = \hat{z}\frac{m_0 I_0}{2p}\begin{cases} \dfrac{1}{R^2}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\right) \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{1}{r}\right) \end{cases} = \begin{cases} m_0\dfrac{I_0}{pR^2}\hat{z} & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Dvs det samme som funnet med kartesiske koordinater.

Oppgave 2



Pga symmetrien vil B kun avhenge av avstanden r fra symmetriaksen, og feltlinjene vil bli sirkler om denne aksen. Vi kan derfor bruke Amperes lov på en sirkel med radius r:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = B\cdot 2\pi r = \mu_0 I_i$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I_i}{2\pi r}$$

Her er I_i netto strøm som går innenfor radius r. Ettersom strømmen er jevnt fordelt over hvert tverrsnitt, har vi i de 4 ulike områdene:

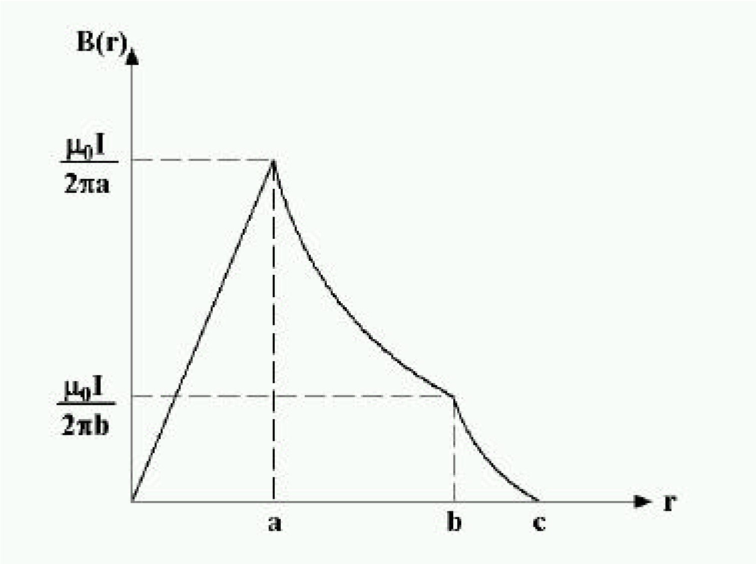
i) $r < a : I_i = I\frac{\pi r^2}{\pi a^2} = I\left(\frac{r}{a}\right)^2 \Rightarrow B(r) = \underline{\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r}$

ii) $a < r < b : I_i = I \Rightarrow B(r) = \underline{\frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$

iii) $b < r < c : I_i = I - I\frac{\pi\left(r^2 - b^2\right)}{\pi\left(c^2 - b^2\right)} = I\,\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \Rightarrow B(r) = \underline{\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}}$

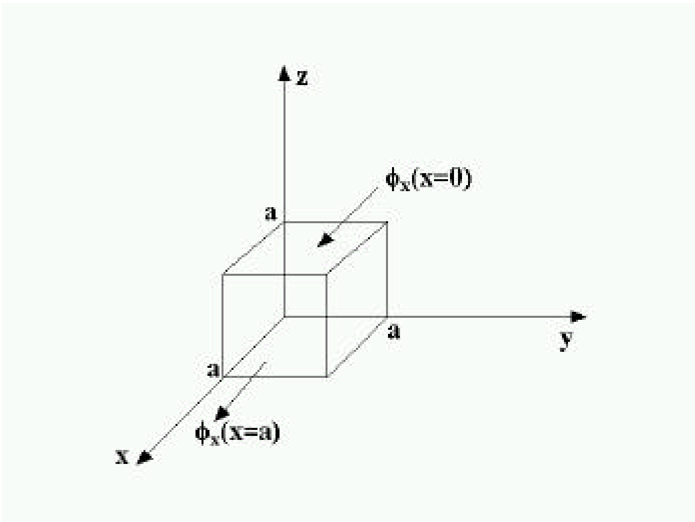
iv) $r > c : I_i = I - I = 0 \Rightarrow B(r) = \underline{0}$

Skisse av B(r):



Oppgave 3

i) Vi benytter først Gauss lov på integralform, f.eks. med en kube plassert med det ene hjørnet i origo, og med sidekanter med lengde a langs x-, y- og z-aksen. Netto magnetisk fluks gjennom overflaten på denne kuben blir:



$$\Delta f = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \Delta f_x + \Delta f_y + \Delta f_z$$

der

$$\Delta f_x = f_x(x=a) - f_x(x=0) = \int_0^a dy \int_0^a dz \left[B_x(x=a) - B_x(x=0)\right]$$

og tilsvarende for Δf_y og Δf_z. Dette gir:

a)

$$
\begin{aligned}
&B_x(a) - B_x(0) = ka \Rightarrow \Delta f_x = ka^3 \\
&B_y(a) - B_y(0) = ka \Rightarrow \Delta f_y = ka^3 \\
&B_z(a) - B_z(0) = ka \Rightarrow \Delta f_z = ka^3 \\
&\Rightarrow \Delta f = \Delta f_x + \Delta f_y + \Delta f_z = 3ka^3 \neq 0
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&B_x(x=a) - B_x(x=0) = kay \\
&B_y(y=a) - B_y(y=0) = -kax \\
&B_z(z=a) - B_z(z=0) = ka(x-y) \\
&\Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta f_x = \int_0^a dz \int_0^a kay\,dy = aka\frac{1}{2}a^2 \\
&\Delta f_y = \int_0^a dz \int_0^a (-kax)dx = -aka\frac{1}{2}a^2 \\
&\Delta f_z = \int_0^a dx \int_0^a dy\,ka(x-y) = 0 \\
&\Rightarrow \Delta f = 0
\end{aligned}
$$

Følgelig er feltet under punkt b) et mulig **B**-felt, mens det under punkt a) ikke er det.

ii) Gauss lov på differensialform, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, gir:

a) $\nabla \cdot \vec{B} = \dfrac{\partial B_x}{\partial x} + \dfrac{\partial B_y}{\partial y} + \dfrac{\partial B_z}{\partial z} = k(1+1+1) = 3k \neq 0$

b) $\nabla \cdot \vec{B} = k(y - x + (x - y)) = 0$

Med andre ord, samme konklusjon om vi bruker integral- eller differensialversjonen av Gauss lov!

Oppgave 4

i) Elektrisk dipol i homogent elektrisk felt **E**

a) Det virker en kraft $\mathbf{F}_+ = qE\,\hat{x}$ på den positive ladningen og en tilsvarende kraft $\mathbf{F}_- = -qE\,\hat{x}$ på den negative ladningen. Den totale kraften blir dermed $\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = 0$.

b) Dreiemomentet om aksen normalt på dipolens midtpunkt blir:

$$\vec{t} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \frac{1}{2}\vec{a} \times q\vec{E} + \left(-\frac{1}{2}\vec{a}\right) \times \left(-q\vec{E}\right) = q\vec{a} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E} = -\vec{E} \times \vec{p} = -pE\sin q \quad \hat{z}$$

c) Vi ser fra figuren at krafta **F** gir et dreiemoment

$$\vec{t} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times F_a \hat{a} = rF_a\,\hat{z}$$

omkring z-aksen. Kraftkomponenten F_r er parallell med **r** og bidrar ikke til dreiemomentet. Videre kan vi uttrykke de to komponentene av krafta ved hjelp av den potensielle energien U:

$$\vec{F} = -\nabla U = -\left(\hat{r}\frac{d}{dr} + \hat{a}\,\frac{1}{r}\frac{d}{da}\right)U = \hat{r}F_r + \hat{a}F_a$$

$$\Rightarrow F_r = -\frac{dU}{dr} \qquad F_a = -\frac{1}{r}\frac{dU}{da}$$

Sammenligning av de to uttrykkene for F_α gir da:

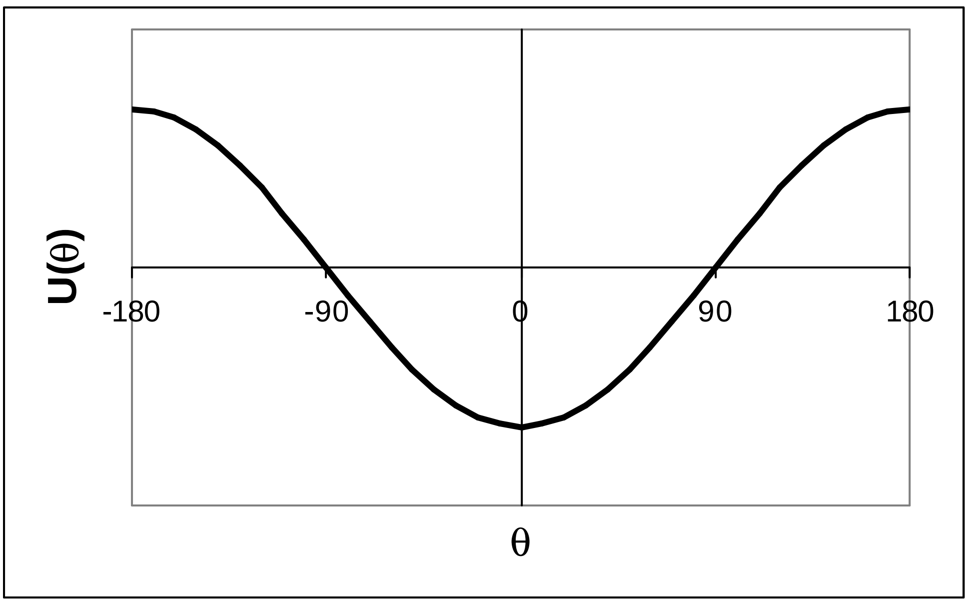
$$t = rF_a = -\frac{dU}{da}$$

En vinkelendring $d\alpha$ gir altså en endring i potensiell energi $dU = -\tau\, d\alpha$. Den potensielle energien til den elektriske dipolen ovenfor, med en vinkel θ mellom **E** og **p**, blir dermed, relativt til en vilkårlig valgt referansevinkel θ_0:

$$U(q) = -\int_{q_0}^{q} t\,da = pE\int_{q_0}^{q} \sin a\,da = -pE\cos q + pE\cos q_0 = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

der vi valgte $\theta_0 = \pi/2$.

Skisse:



Stabil likevekt har dipolen når θ = 0, dvs når **p** er parallell med **E**. Det elektriske feltet søker å rette inn dipolen langs **E**. Det er nettopp denne tendensen som gjør seg gjeldende når vi plasserer et dielektrisk medium i et ytre elektrisk felt.

ii) Magnetisk dipol i homogent magnetfelt **B**

a) Det virker en kraft d**F** = I d**l** × **B** på et lite element d**l** av strømsløyfa. Den totale kraften får vi ved å integrere over hele strømsløyfa:

$$\vec{F} = \oint d\vec{F} = \oint I d\vec{l} \times \vec{B} = I\left(\oint d\vec{l}\right)\times \vec{B} = 0$$

Her er både I og **B** konstanter som vi kan ta utenfor integraltegnet. Men da står vi igjen med et integral av d**l** rundt en sirkel, og dette integralet må åpenbart være lik null, ettersom det for ethvert element d**l** finnes et element –d**l** på motsatt side av sirkelen. (Integralet blir lik null for en vilkårlig lukket kurve: Vi starter og ender opp i samme posisjon, og for å få til det må enhver forflytning bort fra startposisjonen før eller siden etterfølges av en tilsvarende forflytning i motsatt retning!)

b) Dreiemomentet omkring x-aksen blir: t = $\oint$ **r** × d**F** = I ($\oint$ **r** × d**l**) × **B**.

Vi ser fra figuren i oppgaveteksten at både **r** og d**l** ligger i xy-planet, slik at vektoren **r** × d**l** må ligge langs z-aksen. Videre ser vi at vektoren d**l** danner en vinkel α med **r**, slik at
r × d**l** = r dl sinα $\hat{z}$ = R sinα Rdα sinα $\hat{z}$ =R^2 $\sin^2$α dα $\hat{z}$. Problemet er dermed redusert til å integrere $\sin^2$α rundt en sirkel, dvs fra α = 0 til α = 2π. Verdien av dette integralet blir π, slik at dreiemomentet blir:

$$\vec{t} = IpR^2\hat{z}\times\vec{B} = \vec{m}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{m} = -mB\sin q \quad \hat{x}$$

c) Utregning av potensiell energi blir helt tilsvarende som for den elektriske dipolen:

$$U(q) = -mB\cos q = -\vec{m}\cdot\vec{B}$$

så stabil likevekt har vi igjen for θ = 0, dvs med m parallell med **B**. Magnetfeltet søker altså å rette inn dipolen langs **B**. I mange materialer har atomene eller molekylene et permanent magnetisk moment (på samme måte som mange materialer også har atomer eller molekyler med et permanent *elektrisk* dipolmoment). Når et slikt materiale plasseres i et ytre magnetfelt, får vi en tendens til innretting av atomære (evt molekylære) magnetiske moment langs **B**. Vi får en *magnetisering* i mediet (på samme måte som vi fikk en *polarisering* av dielektriske medier i et elektrisk felt).