NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng

LØSNINGSFORSLAG TIL

EKSAMEN I FAG SIF 4012 ELEKTROMAGNETISME
(SIF 4012 FYSIKK 2)

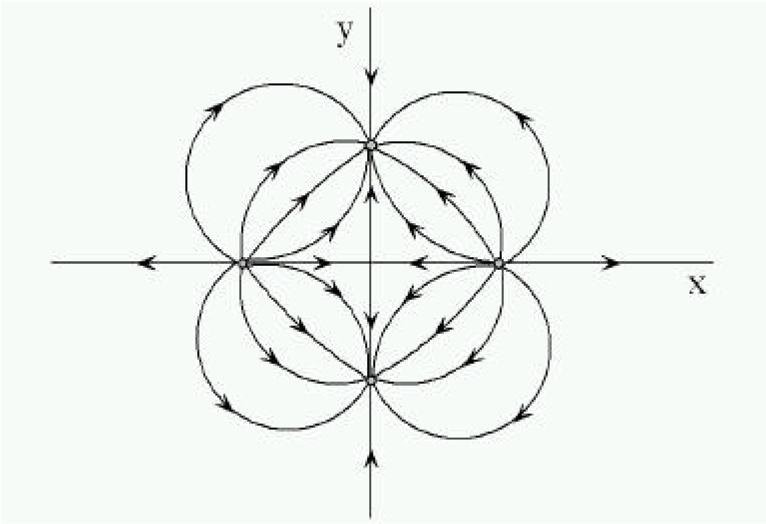
Onsdag 11. desember 2002

kl. 0900-1400

Eksamen bestod av 10 deloppgaver som alle teller like mye under bedømmelsen, 10 poeng pr deloppgave, 100 poeng oppnåelig totalt.

OPPGAVE 1

Feltlinjer for **E**:



Noe i denne stilen! Symmetrien i problemet tilsier i hvert fall at **E** peker utover langs positiv og negativ x-akse, og innover langs positiv og negativ y-akse på ”utsiden” (|x| > a, evt |y| > a). På ”innsiden” (|x| < a, evt |y| <a) må det bli motsatt. Dessuten kan en vel overbevise seg om at på linjene x = ± y må **E** stå vinkelrett på disse linjene. Totalladningen til systemet er lik null, så alle feltlinjene som starter på de positive punktladningene må ende opp på de negative.

Superposisjonsprinsippet gir at potensialet V blir summen av potensialene fra hver punktladning. Dermed, på x-aksen:

$$V(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (x-a)} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (x+a)} - \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2+a^2}}$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x}{x^2-a^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \right)$$

der vi har brukt at i avstand x (fra origo) er avstanden til de to positive punktladningene hhv x – a og x + a, mens avstanden til de to negative punktladningene er $(x^2 + a^2)^{1/2}$.
Det elektriske feltet **E**(x) bestemmes fra den oppgitte sammenhengen **E** = −∇V. Ettersom V kun avhenger av x, blir det bare x-komponenten av gradientoperatoren som gir bidrag:

$$\vec{E}(x) = \hat{x}\left(-\frac{dV}{dx}\right) = \hat{x}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (x-a)^2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (x+a)^2} - \frac{2qx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+a^2)^{3/2}} \right)$$

Om en vil, kan en trekke dette sammen på en felles nevner:

$$\vec{E}(x) = \hat{x}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x+a)^2} - \frac{2x}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}\right)$$

$$= \hat{x}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x+a)^2\left(x^2+a^2\right)^{3/2} + (x-a)^2\left(x^2+a^2\right)^{3/2} - 2x(x+a)^2(x-a)^2}{(x-a)^2(x+a)^2\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$$

$$= \hat{x}\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(x^2+a^2\right)^{5/2} - x\left(x^2-a^2\right)^2}{\left(x^2-a^2\right)^2\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$$

$$= \hat{x}\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\frac{\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)^{5/2} - \left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)^2}{\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)^2\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)^{3/2}}$$

Fra dette uttrykket er det lett å se hva **E** blir til ledende orden når x >> a. Til ”nullte orden” blir telleren 1 – 1 = 0, så vi må rekkeutvikle og ta med ett ledd til:

$$\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)^{5/2} \approx 1+\frac{5}{2}\frac{a^2}{x^2}$$

$$\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)^2 \approx 1-2\frac{a^2}{x^2}$$

Nevneren blir til ledende orden lik 1, slik at **E** blir tilnærmet lik

$$\vec{E} = \frac{2q\left(\frac{5}{2}\frac{a^2}{x^2} - \left(-2\frac{a^2}{x^2}\right)\right)}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\hat{x} = \frac{9qa^2}{4\pi\varepsilon_0 x^4}\hat{x}$$

Sammenligner vi med det oppgitte uttrykket, ser vi at $\underline{k = 9qa^2}$ og $\underline{n = 4}$.
Vi kunne selvsagt ha tatt utgangspunkt i det første uttrykket vi fant for **E** og rekkeutviklet de tre brøkene som inngår. Vi tar den felles faktoren $q/4\pi\varepsilon_0$ utenfor og benytter oss av den oppgitte rekkeutviklingen $(1 + u)^{-p} = 1 - p\,u + \frac{1}{2}\,p\,(p + 1)\,u^2 \ldots$:

$$\frac{1}{(x-a)^2} = \frac{1}{x^2\left(1-\frac{a}{x}\right)^2} \approx \frac{1}{x^2}\left(1+2\frac{a}{x}+3\frac{a^2}{x^2}\right)$$

$$\frac{1}{(x+a)^2} = \frac{1}{x^2\left(1+\frac{a}{x}\right)^2} \approx \frac{1}{x^2}\left(1-2\frac{a}{x}+3\frac{a^2}{x^2}\right)$$

$$-\frac{2x}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} = -\frac{2}{x^2}\frac{1}{\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)^{3/2}} \approx -\frac{2}{x^2}\left(1-\frac{3}{2}\frac{a^2}{x^2}\right)$$

(Her var altså u = $-a/x$ i det første uttrykket, a/x i det andre og a^2/x^2 i det tredje, mens p var hhv 2, 2 og 3/2 i de tre uttrykkene.) Når vi legger sammen de tre uttrykkene, ser vi at ledd til både laveste orden (proporsjonale med $1/x^2$) og nest laveste orden (proporsjonale med

$(a/x)/x^2$) kansellerer. Det var altså nødvendig å inkludere ledd av orden $(a^2/x^2)/x^2$ for å få noe forskjellig fra null. Vi får $3a^2/x^4$ fra hvert uttrykk, slik at $E \approx 9qa^2/4\pi\varepsilon_0 x^4$, som funnet ovenfor. Endelig, og kanskje aller enklest, kunne vi startet fra V(x) og funnet at $V(x) = 3qa^2/(4\pi\varepsilon_0 x^3)$ til ledende orden når x >> a. Igjen ser vi at $E = -dV/dx = 9qa^2/4\pi\varepsilon_0 x^4$.

OPPGAVE 2

Her er det ikke nødvendig med noe regning. Men vi trenger å innse følgende:

- Fra det oppgitte uttrykket for magnetfeltet på symmetriaksen til ei sirkulær strømsløyfe følger det at magnetfeltet i *sentrum* av ei sirkulær strømsløyfe med radius L er $B = \mu_0 I/2L$, for da er d = 0.
- Enhver sirkelbue som spenner over en vinkel θ (°) må da gi et bidrag $B(\theta) = (\mu_0 I/2L)(\theta/360)$ til magnetfeltet i sentrum av sirkelen.
- De radielt rettede bitene av strømsløyfa gir null bidrag til magnetfeltet i sentrum. Det ser en av det oppgitte uttrykket for d**B**, for da er $Id\vec{l} \parallel \hat{r}$ og dermed $Id\vec{l} \times \hat{r} = 0$.
- Alle sirkelbuene fører strømmen I i samme sirkulære retning. Høyrehåndsregelen (eventuelt inspeksjon av $Id\vec{l} \times \hat{r}$ med $\hat{r}$ rettet radielt *inn* mot sentrum for alle strømelementer $Id\vec{l}$) gir da at **B** i sentrum må ha retning *inn i* papirplanet.

Sirkelbuene ved radius a spenner tilsammen over 15+20+75+40=150°, ved radius b over 55+50+65+40=210°, så magnetfeltet i sentrum blir

$$B_P = \frac{m_0 I}{2a}\frac{150}{360} + \frac{m_0 I}{2b}\frac{210}{360} = \underline{\frac{m_0 I}{24}\left(\frac{5}{a} + \frac{7}{b}\right)}$$

OPPGAVE 3

Vi bruker Kirchhoffs strømregel og spenningsregel og finner (f.eks.):

i $\quad I_1 + I_2 + I_3 = 0$

ii $\quad \mathcal{E}_1 = -R_3 I_3 + R_1 I_1$

iii $\quad \mathcal{E}_2 = -R_3 I_3 + R_2 I_2$

Her har vi brukt at den totale strømmen inn mot (eller ut av) ethvert knutepunkt i kretsen skal summere seg til null (i), og dessuten at total elektromotorisk spenning i ei lukket sløyfe skal være lik summen av spenningsfallene i sløyfa. Her har vi sett på den "ytre" sløyfa (ii) med $\mathcal{E}_1$, R_3 og R_1, og sløyfa til høyre (iii) med $\mathcal{E}_2$, R_3 og R_2. (Positivt spenningsfall i strømmens positive retning.) Da har vi 3 lineært uavhengige ligninger for bestemmelse av I_1, I_2 og I_3.
Fra (i) kan f.eks. I_2 uttrykkes ved I_1 og I_3, og fra (ii) kan I_3 uttrykkes ved I_1. Kombinerer vi dette, har vi både I_2 og I_3 uttrykt ved I_1, som innsatt i (iii) gir

$$I_1 = \frac{(R_2+R_3)(\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2)+R_2\mathcal{E}_2}{R_2R_3+R_1(R_2+R_3)} = \frac{(2+3)(1-2)+2\cdot 2}{2\cdot 3+1\cdot(2+3)} = \frac{-5+4}{6+5} = \underline{-\frac{1}{11} \approx -0.09\ \text{A}}$$

og med alle R i enheten Ω og alle $\mathcal{E}$ i enheten V blir enheten for I_1 automatisk A (ampere). Det negative fortegnet sier bare at det går en *positiv* strøm på 1/11 A i *motsatt* retning av *valgt* retning for I_1 i figuren.
For I_2 uttrykt ved I_1 finner vi

$$I_2 = \frac{\mathsf{E}_2 - R_3 I_1}{R_2 + R_3} = \frac{2 - 3\cdot\left(-\frac{1}{11}\right)}{2+3} = \frac{\frac{22+3}{11}}{5} = \underline{\frac{5}{11} \approx 0.45\,\text{A}}$$

For I_2 hadde vi altså valgt "riktig" positiv strømretning i figuren.
Endelig har vi I_3 uttrykt ved I_2:

$$I_3 = \frac{R_2 I_2 - \mathsf{E}_2}{R_3} = \frac{2\cdot\frac{5}{11} - 2}{3} = \frac{10-22}{33} = \underline{-\frac{4}{11} \approx -0.36\,\text{A}}$$

og vi ser at $I_1+I_2+I_3=0$, som vi skulle ha. For I_3 hadde vi altså også valgt feil positiv strømretning i figuren.

<u>OPPGAVE 4</u>

a) $C_0 = Q/V = (\sigma A)/(Ed) = (\sigma A)/(\sigma d/\varepsilon_0) = \varepsilon_0 A/d$ (qed)
Vi benyttet her det oppgitte uttrykket for elektrisk felt fra uendelig stor flate. Siden dette er uavhengig av avstanden fra flaten, vil bidragene til det totale elektriske feltet mellom platene adderes til σ/ε_0, mens utenfor platene kansellerer de to bidragene (pga motsatt retning på bidragene fra positivt og negativt ladet plate).

b) Når luft mellom platene erstattes av et dielektrikum med permittivitet $\varepsilon = \varepsilon_r\,\varepsilon_0$, må ε_0 i uttrykket for kapasitansen erstattes med $\varepsilon_r\,\varepsilon_0$. Her har vi en seriekobling av tre kapasitanser, hver med plateavstand d/3 og areal A, og den ene med dielektrikum med permittivitet $\varepsilon_r\,\varepsilon_0$. For seriekobling av kapasitanser er total kapasitans gitt ved

$$C = \left(\sum_i \frac{1}{C_i}\right)^{-1}$$

der C_i er enkeltkapasitansene. For C_1 har vi dermed:

$$C_1 = \left(2\frac{d/3}{e_0 A} + \frac{d/3}{e_r e_0 A}\right)^{-1} = e_0 \frac{A}{d}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3e_r}\right)^{-1} = C_0\left(\frac{2e_r + 1}{3e_r}\right)^{-1} = \underline{C_0 \frac{3e_r}{2e_r + 1}}$$

I det elektriske feltet fra de to lederplatene vil elektriske dipoler (enten permanente eller induserte) på atomært eller molekylært nivå i det dielektriske mediet få en tendens til å rette seg inn parallelt med det påtrykte feltet. Nettoeffekten av denne *polariseringen* er at det induseres en *bundet overflateladning* på begge sider av dielektrikumet, slik at det totale feltet E_2 inne i dielektrikumet blir *svekket* i forhold til feltet E_1 i de to luftfylte sjiktene. Altså: $E_1 > E_2$.
For å bestemme sammenhengen mellom σ_b og σ_f kan vi f.eks. starte med at den elektriske forskyvningen er konstant overalt og lik $D = \sigma_f$. Videre må vi ha $V = d\ E_2/3 + 2\ d\ E_1/3$, og dessuten $D = \varepsilon E$.

Kombinerer vi dette, finner vi:

$E_1 = D/\varepsilon_0 \qquad E_2 = D/\varepsilon_r\varepsilon_0$

$$V = \frac{dD}{3\varepsilon_0}\left(2 + \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$\underline{D = \frac{3V\varepsilon_0}{d}\frac{\varepsilon_r}{2\varepsilon_r + 1} = \sigma_f}$$

$$E_2 = \frac{3V}{d}\frac{1}{2\varepsilon_r + 1}$$

Videre har vi for polariseringen P_2 i dielektrikumet:

$$P_2 = \underline{\sigma_b} = D_2 - \varepsilon_0 E_2 = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E_2 = \underline{\frac{3V\varepsilon_0}{d}\frac{\varepsilon_r - 1}{2\varepsilon_r + 1}}$$

Forholdet mellom σ_b og σ_f blir altså:

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_f} = \underline{\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}}$$

Kommentar:

Vi ser at svaret er rimelig i de to grensene

$\varepsilon_r \to 1$ (luft): $\sigma_b \to 0$, ingen indusert overflateladning, OK!

$\varepsilon_r \to \infty$ (metall): $\sigma_b \to \sigma_f$, fullstendig skjerming av E-feltet inne i mediet, OK!

c) Parallellkobling av kapasitanser: $C = \sum_i C_i$

$$\Rightarrow C_2 = \varepsilon_r\varepsilon_0\frac{A/3}{d} + \varepsilon_0\frac{2A/3}{d} = \underline{C_0\left(\frac{\varepsilon_r}{3} + \frac{2}{3}\right)}$$

Dermed øker C_2 lineært med størrelsen på ε_r, mens $C_1 \to 3/2$ når $\varepsilon_r >> 1$.

Når $\varepsilon_r >> 1$, må C_1 bli tilnærmet en seriekobling av to luftfylte kapasitanser med areal A og plateavstand d/3. Altså:

$$C_1 \xrightarrow{\varepsilon_r >> 1} \left(2\frac{1}{\varepsilon_0\frac{A}{d/3}}\right)^{-1} = \frac{3}{2}C_0$$

Mens C_2 blir tilnærmet lik *en* kapasitans fylt med dielektrikum med permittivitet $\varepsilon_r\varepsilon_0$, areal A/3 og plateavstand d. Altså:

$$C_2 \xrightarrow{\varepsilon_r >> 1} \varepsilon_r\varepsilon_0\frac{A/3}{d} = \frac{\varepsilon_r}{3}C_0$$

OPPGAVE 5

a) Ettersom $\vec{B} = B\hat{\phi}$ (overalt), velger vi en sirkel med sentrum på z-aksen som "Amperekurve". Da blir $\vec{B}\cdot d\vec{l} = Bs\,d\phi$ slik at Amperes lov gir $Bs\cdot 2\pi = \mu_0 I = \mu_0 N I_0$, der vi har brukt at total strøm omsluttet av Amperekurven er $I = NI_0$. Dermed, inne i toroiden:

$$B = \frac{\mu_0 N I_0}{2\pi s}\text{, dvs } \underline{k = \frac{\mu_0 N}{2\pi}} \quad (= 2N\cdot 10^{-7}\text{ H/m })$$

Hvis Amperekurven ligger *utenfor* toroiden, blir I = 0, og dermed B = 0.

b) For å finne gjensidig induktans M, må vi bestemme magnetisk fluks ϕ gjennom den rektangulære lederen for en gitt strøm I_0 i spoletråden. Med $B = k\,I_0/y$ får vi:

$$\phi = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int_{a+c}^{a+c+d} \frac{kI_0}{y} h\,dy = kI_0 h \ln\frac{a+c+d}{a+c} = MI_0$$

$\Rightarrow$

$$\underline{M = kh\ln\frac{a+c+d}{a+c} = \frac{\mu_0 N h}{2\pi}\ln\frac{a+c+d}{a+c}}$$

(I yz-planet har vi s = y. Videre har $\vec{B}$ og $d\vec{A}$ samme retning (inn i papirplanet, dvs langs $-\hat{x}$), og for dA valgte vi rektangulære "striper" med høyde h og bredde dy)

Med tidsavhengig strøm I(t) i spoletråden:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -kh\ln\frac{a+c+d}{a+c}\frac{dI}{dt} = \begin{cases} -kh\alpha I_0 \ln\dfrac{a+c+d}{a+c} & 0 < t < \dfrac{1}{\alpha} \\ 0 & t \geq \dfrac{1}{\alpha} \end{cases}$$

Retning på $\mathcal{E}$: *Mot* urviseren i figuren i oppgaveteksten. (En positiv dI/dt *med* urviseren vil øke den magnetiske fluksen *inn i* planet. Indusert ems $\mathcal{E}$ vil da gi en strøm i den rektangulære lederen med tilhørende magnetfelt *ut av* planet, slik at den påtrykte økningen inn i planet *motvirkes* av $\mathcal{E}$. Lenz' lov!)

OPPGAVE 6

a) (i) Motstand: $V_R = RI$ $\Rightarrow Z_R = V_R/I = R$ $\Rightarrow$ $|Z_R| = 1\Omega$, $\alpha_R = 0$

(ii) Kapasitans: $V_C = Q/C$. Med $Q = Q_0\exp(i\omega t)$ og $I = I_0\exp(i\omega t) = dQ/dt$, har vi $I = i\omega Q$, og dermed $V_C = I/i\omega C$. Dermed: $Z_C = V_C/I = 1/i\omega C = (1/\omega C)\exp(-i\pi/2)$
$\Rightarrow$ $|Z_C| = 1/\omega C = 1/(10^3\cdot 10^{-4}) = 10\Omega$, $\alpha_C = -\pi/2$

(iii) Induktans: $V_L = L\,dI/dt = L\,i\omega I$ (med $I = I_0\exp(i\omega t)$). Dermed: $Z_L = V_L/I = i\omega L = \omega L\exp(i\pi/2)$ $\Rightarrow$ $|Z_L| = \omega L = 10^3\cdot 10^{-4} = 0.1\Omega$, $\alpha_L = \pi/2$

b) Vi benytter de oppgitte oppskriftene for serie- og parallellkobling av komplekse impedanser. Dermed blir total impedans for kretsen:

$$Z_0 = R + \left(\frac{1}{iwL} + iwC \right)^{-1} = R + \frac{iwL}{1 - w^2 LC} = |Z_0| \exp(i a_0)$$

med

$$|Z_0| = \left(R^2 + \left(\frac{wL}{1 - w^2 LC} \right)^2 \right)^{1/2} = R \left(1 + \left(\frac{\frac{w}{R/L}}{1 - \frac{w^2}{1/(LC)}} \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$a_0 = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} Z_0}{\operatorname{Re} Z_0} \right) = \arctan\left(\frac{wL}{R(1 - w^2 LC)} \right) = \arctan\left(\frac{\frac{w}{R/L}}{1 - \frac{w^2}{1/(LC)}} \right)$$

Sammenligning med de oppgitte uttrykkene gir da:

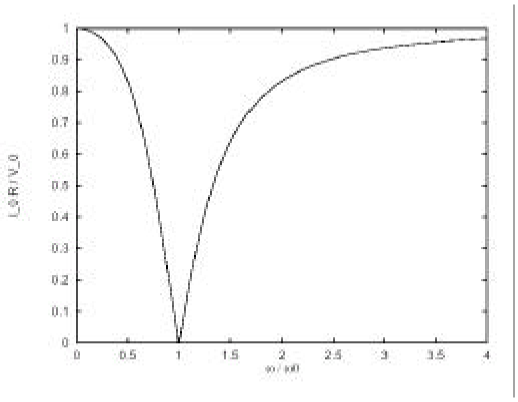
$$\underline{w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad w_1 = \frac{R}{L}}$$

Strømamplituden I_0 blir:

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z_0|} = \frac{V_0}{R \left(1 + \left(\frac{w/w_1}{1 - w^2/w_0^2} \right)^2 \right)^{1/2}} = \frac{V_0}{R \left(1 + \left(\frac{w/w_0}{1 - w^2/w_0^2} \right)^2 \right)^{1/2}}$$

der vi satte inn $\omega_1 = \omega_0$.
Her ser vi direkte at $I_0(0) = V_0/R$ og $I_0(\omega_0) = 0$. La oss regne ut noen verdier til:
$I_0(\omega_0/2) = (V_0/R)(13/9)^{-1/2} = 0.83\ V_0/R$
$I_0(2\omega_0) = (V_0/R)(13/9)^{-1/2} = 0.83\ V_0/R$
$I_0(3\omega_0) = (V_0/R)(73/64)^{-1/2} = 0.94\ V_0/R$
$I_0(4\omega_0) = (V_0/R)(241/225)^{-1/2} = 0.97\ V_0/R$

Skisse:



Tallverdier, med R, L og C som i punkt a):
$\omega_0 = (10^{-4} \cdot 10^{-4})^{-1/2} = \underline{10^4\ s^{-1}}$ $\qquad$ $\omega_1 = 1/10^{-4} = \underline{10^4\ s^{-1}}$