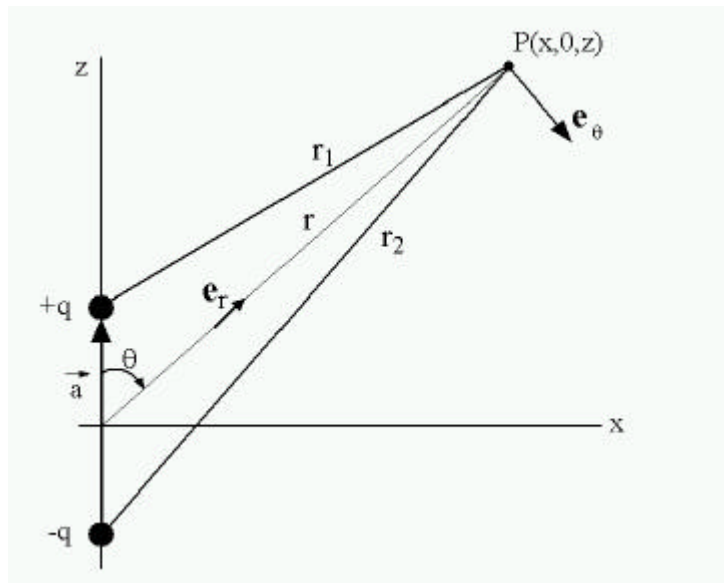


Øving 3

Veiledning: Torsdag 12. september
 Innleveringsfrist: Tirsdag 17. september kl 12.00

Oppgave 1: Elektrisk dipol

En elektrisk dipol er plassert langs z-aksen som vist i figuren. Det elektriske dipolmomentet er definert som $\mathbf{p} = q \mathbf{a}$, der $\mathbf{a}$ = vektoren fra $-q$ til $+q$. I denne konfigurasjonen er det hensiktsmessig å velge kulekoordinater (r, θ, ϕ) , slik at potensialet V og feltet $\mathbf{E}$ angis som funksjoner av avstanden r fra origo og vinkelen θ mellom $\mathbf{r}$ og aksen gjennom dipolen (se figuren). V og $\mathbf{E}$ er begge uavhengig av ϕ pga symmetri omkring z-aksen.



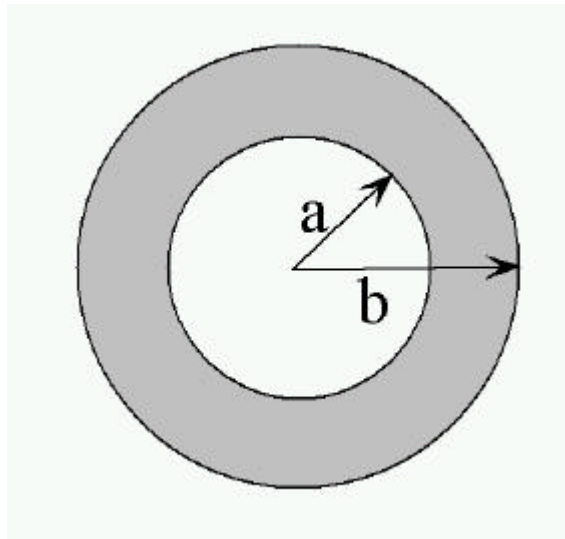
- Vis at i stor avstand fra dipolen ($r \gg a$) er potensialet gitt ved

$$V(r, \theta) = p \cos \theta / 4\pi \epsilon_0 r^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} / 4\pi \epsilon_0 r^3$$
- Finn det elektriske feltet $\mathbf{E}(r, \theta) = E_r \mathbf{e}_r + E_\theta \mathbf{e}_\theta$ i stor avstand fra dipolen uttrykt i kulekoordinater. Gradienten i kulekoordinater er gitt ved

$$\nabla V = \mathbf{e}_r (\partial V / \partial r) + \mathbf{e}_\theta (1/r) (\partial V / \partial \theta) + \mathbf{e}_\phi (1/r \sin \theta) (\partial V / \partial \phi)$$
 $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta \text{ og } \mathbf{e}_\phi \text{ er enhetsvektorer for } r, \theta \text{ og } \phi)$
 Er resultatet rimelig for $\theta = 0$ og for $\theta = \pi/2$? Enn for $r = 0$?
- Finn det elektriske feltet $\mathbf{E}(x, z)$ uttrykt i kartesiske koordinater for $r \gg a$. Tips: Ta utgangspunkt i uttrykkene for E_r og E_θ i punkt b). Ved hjelp av en figur kan du finne sammenhengen mellom (x, z) og (r, θ) , samt E_x og E_z uttrykt ved E_r, E_θ og θ .
- Finn også $\mathbf{E}(x, z)$ uttrykt i kartesiske koordinater ved å skrive om potensialet V uttrykt ved kartesiske koordinater, $V = V(x, z)$, og deretter bruke gradientoperatoren i kartesiske koordinater.

Oppgave 2

Et kuleskall med indre radius a og ytre radius b har en (rom-)ladningstetthet $\rho(r) = k/r^2$ i området $a < r < b$ ($\rho = 0$ ellers). Bruk Gauss lov til å bestemme det elektriske feltet i de tre områdene (i) $r < a$, (ii) $a < r < b$, (iii) $r > b$. Skisser $|\mathbf{E}|$ som funksjon av r når $b = 2a$.



Oppgave 3. Differensielt element i kulekoordinater. (Lærerik matematikkøvelse!?)

I kartesiske koordinater er et infinitesimalt (differensielt) linjeelement gitt ved $d\mathbf{s} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$, et infinitesimalt arealelement $d\mathbf{A}$ henholdsvis $dy dz \mathbf{i}$, $dx dz \mathbf{j}$ og $dy dx \mathbf{k}$ (dvs med retning normalt på flaten) og et infinitesimalt volumelement $d\tau = dx dy dz$.

a) Vis at i kulekoordinater (r, θ, φ) er de tilsvarende størrelser

$$d\mathbf{s} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

$$d\mathbf{A}_r = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \mathbf{e}_r, d\mathbf{A}_\theta = r dr \sin\theta d\varphi \mathbf{e}_\theta, d\mathbf{A}_\varphi = r dr d\theta \mathbf{e}_\varphi$$

$$d\tau = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$$

Tips: Tegn opp et infinitesimalt volumelement som avgrenses av flatene r og $r+dr$, θ og $\theta+d\theta$, φ og $\varphi+d\varphi$, og sammenlign med det tilsvarende for kartesiske koordinater.

($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$ er enhetsvektorer i hhv x -, y - og z -retning mens $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ og $\mathbf{e}_\varphi$ er tilsvarende for r , θ og φ)

b) Vis på grunnlag av formlene over at ei kule med radius R har volum $(4/3) \pi R^3$ og overflateareal $4\pi R^2$.