

SIF4012 og MNFFY103 høst 2002: Sammendrag uke 41

(Alonso&Finn 24.11, 24.12, 24.9, 24.14 + noe utenom A&F)

Magnetisme som relativistisk fenomen

Fullstendig uten kjennskap til fenomenet magnetisme og magnetiske krefter viste vi at en punktladning q med hastighet u parallelt med en rett, uendelig lang strømførende leder blir påvirket av en kraft

$$F = -qu \frac{I}{2pe_0 c^2 y} \quad (1)$$

der I er strømstyrken i lederen, y er avstanden fra lederen til punktladningen, og c er lyshastigheten. Med positiv q og hastighet u i *samme* retning som strømmen I *tiltrekkes* punktladningen av lederen. **Årsaken** til denne kraften er som følger: Vi antok at strømmen I skyldtes positive og negative ladningsbærere, med driftshastighet langs lederen hhv v og $-v$, og ladningstetthet hhv λ og $-\lambda$, *målt i lab.systemet der punktladningen har hastighet u* . Fra punktladningens synspunkt, derimot, dvs *målt i referansesystemet der punktladningen er i ro*, har de positive og negative ladningene i lederen driftshastigheter hhv

$$v_+ = \frac{v-u}{1-\frac{vu}{c^2}} \quad \text{og} \quad v_- = \frac{-v-u}{1+\frac{vu}{c^2}}$$

der vi har benyttet Einsteins regel for addisjon av relative hastigheter. Men siden v er større (i absoluttverdi) enn v_+ , blir *Lorentz-kontraksjonen* for avstanden mellom negative ladninger *større enn* for avstanden mellom positive ladninger, slik at punktladningen ser en større tetthet av negative enn av positive ladninger i lederen! I lab.systemet er altså lederen elektrisk nøytral, men i punktladningens referansesystem har lederen netto negativ elektrisk ladning! Punktladningen erfarer dermed en *tiltrekkende elektrisk kraft* i sitt eget referansesystem, og vi regnet ut at denne elektriske kraften var

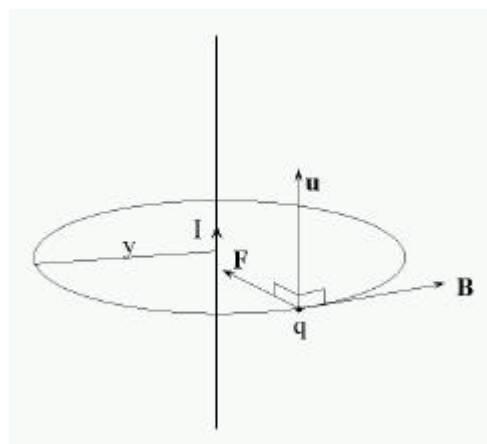
$$\bar{F} = -qu \frac{I}{2pe_0 c^2 y} \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad (2)$$

Fra relativitetsteorien hentet vi regelen for transformasjon av krefter mellom ulike referansesystemer i relativ hastighet u : $F = \sqrt{1-u^2/c^2} \bar{F}$ for komponenten av $\bar{F}$ normalt på relativhastigheten u . Dermed fikk vi (1) for kraften F på punktladningen, målt i lab.systemet. Og dette er det vi kjenner som magnetisme: En elektrisk strøm (altså: ladninger i bevegelse) påvirker andre ladninger i bevegelse med en *magnetisk kraft*. På samme måte som vi beskrev den elektrostatiske kraften ved hjelp av det elektriske feltet $\mathbf{E}$ kan vi beskrive den magnetiske kraften ved hjelp av *magnetfeltet $\mathbf{B}$* , slik at $\mathbf{F} = q \mathbf{u} \times \mathbf{B}$. Sammenholder vi dette med (1), ser vi at en lang rett strømførende leder omgir seg med et magnetfelt

$$B(y) = \frac{I}{2pe_0 c^2 y}$$

i en avstand y fra lederen. Retningen på $\mathbf{B}$ må være som vist i figuren, dersom $\mathbf{F}$ skal få riktig størrelse og retning, dvs *inn* mot lederen. Vi skal straks se hvordan vi kan bestemme magnetfeltet som genereres av en strømførende leder av vilkårlig utforming.

Kombinasjonen $1/\epsilon_0 c^2$ kalles for *permeabiliteten* til vakuum: $\mu_0 \equiv 1/\epsilon_0 c^2$. Vi har tidligere sett at dielektriske mediers "respons" på et ytre elektrisk felt kan beskrives ved hjelp av mediets permittivitet ϵ . På analogt vis skal vi etterhvert se at magnetiske mediers respons på et ytre magnetfelt kan beskrives ved hjelp av mediets permeabilitet μ .



Lorentzkraften

I det generelle tilfellet kan vi selvsagt ha både et elektrisk felt $\mathbf{E}$ og et magnetfelt $\mathbf{B}$ tilstede. En punktladning q med hastighet $\mathbf{v}$ vil da bli påvirket av en elektrisk kraft $q\mathbf{E}$ og en magnetisk kraft $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, dvs en totalkraft

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (\text{Lorentzkraften})$$

Magnetfelt fra elektrisk strøm: Biot-Savarts lov

Basert på eksperimenter er det funnet at et differensielt lederstykke $d\mathbf{l}$ som fører en strømstyrke I genererer følgende magnetfelt $d\mathbf{B}$ i en avstand $\mathbf{r}$ fra lederstykket:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (\text{Biot-Savarts lov})$$

Her er $\hat{\mathbf{r}}$ som vanlig enhetsvektor langs $\mathbf{r}$, dvs i retningen fra lederstykket $d\mathbf{l}$ til "observasjonspunktet", dvs i det punktet vi ønsker å bestemme magnetfeltet $d\mathbf{B}$. Biot-Savarts lov gjelder for *stasjonære strømmer* og *lukkede strømflyter*. Det totale magnetfeltet $\mathbf{B}$ fra en lukket strømsløyfe finner vi ved å summere opp bidraget fra alle differensielle lederstykker som tilsammen utgjør den lukkede strømflyta, dvs ved å integrere uttrykket for $d\mathbf{B}$ rundt sløyfa:

$$\mathbf{B} = \oint d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Magnetfelt fra uendelig lang rett strømførende leder

Med utgangspunkt i Biot-Savarts lov regnet vi ut magnetfeltet $\mathbf{B}(x)$ i en avstand x fra en rett, uendelig lang strømførende leder (strømstyrke I). Med lederen langs y -aksen og strømmen I i positiv y -retning fant vi

$$\mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} (-\hat{z})$$

Dette gir en kraft

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = qv \frac{\mu_0 I}{2\pi x} (\hat{y} \times (-\hat{z})) = qv \frac{\mu_0 I}{2\pi x} (-\hat{x})$$

på en ladning q som i en avstand x fra lederen beveger seg med hastighet $\mathbf{v} = v\hat{y}$ parallelt med lederen. Dvs, samme svar som vi utledet med utgangspunkt i elektrostatiske og relativitetsteori!

Magnetisk kraft på elektrisk strøm

Med N ladningsbærere på en lengde L av en rett strømførende leder, og med midlere driftshastighet $\mathbf{v}$ langs lederen, har vi en strømstyrke

$$I = \Delta Q / \Delta t = Nq / (L/v) = Nqv / L$$

dvs

$$IL = Nqv$$

Hvis lederen plasseres i et magnetfelt $\mathbf{B}$, vil det virke en magnetisk kraft på ladningene som beveger seg med hastighet $\mathbf{v}$ langs lederen:

$$\mathbf{F} = Nq\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Med andre ord: Den magnetiske kraften på lengden L med strømstyrke I er

$$\mathbf{F} = IL \times \mathbf{B}$$

Generalisering til strømførende leder med vilkårlig form:

$$\mathbf{F} = \int_L d\mathbf{F} = I \int_L d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Krefter mellom to strømførende ledere

To rette, parallelle (uendelig lange) strømførende ledere genererer hvert sitt magnetfelt som påvirker strømmen i den andre lederen med en tiltrekkende (frastøtende) kraft dersom de to strømmene går i samme (motsatt) retning. Med strømstyrker I_1 og I_2 og en innbyrdes avstand r mellom lederne blir kraften pr lengdeenhet lik

$$\mu_0 I_1 I_2 / (2\pi r)$$