

SIF4012 og MNFFY103 høst 2002: Sammendrag uke 46

(Alonso&Finn 27.2, 27.8, 27.11, 27.12)

Elektrodynamikk: Tidsavhengige E- og B-felt

Et tidsavhengig magnetfelt genererer et elektrisk felt:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} \neq 0 \Rightarrow \vec{E}$$

Sammenheng mellom induert emf $\mathcal{E}$ og induert elektrisk felt $\vec{E}$ i lukket sløyfe:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Dermed, ettersom $\mathcal{E} = -d\phi_m/dt$, og magnetisk fluks gjennom flate S omsluttet av lukket kurve c er

$\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$, følger Faraday-Henrys lov (på integralform):

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Med Stokes' teorem kan venstre side omskrives: $\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A}$, og siden dette gjelder for vilkårlig lukket kurve c og vilkårlig omsluttet flate S , følger Faraday-Henrys lov på differensialform:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Merknader:

- Med *statiske* felt blir høyre side i Faraday-Henrys lov lik null, og vi har hva vi tidligere har funnet for *elektrostatisk* felt. Med andre ord: Det induerte elektriske feltet kan altså *ikke* være et *elektrostatisk* felt.
- *Formen* på Faraday-Henrys lov er helt tilsvarende formen på Amperes lov i magnetostatikken. Med andre ord: For et gitt problem med en bestemt symmetri kan det induerte elektriske feltet $\vec{E}$ fra $-d\phi_m/dt$ bestemmes på samme måte som vi bestemte $\vec{B}$ fra $\mu_0 I$.

Gjensidig induktans

Magnetisk fluks ϕ_2 gjennom sløyfe 2 på grunn av elektrisk strøm I_1 i sløyfe 1 er proporsjonal med strømmen I_1 :

$$\phi_2 = M_{21} I_1$$

M_{21} = gjensidig induktans (geometrisk faktor, bestemt av sløyfenes form og innbyrdes plassering)

Tilsvarende: Magnetisk fluks ϕ_1 gjennom sløyfe 1 på grunn av elektrisk strøm I_2 i sløyfe 2 er proporsjonal med strømmen I_2 :

$$\phi_1 = M_{12} I_2$$

Det kan vises generelt (Griffiths, 7.2.3) at $M_{21} = M_{12} = M$

SI-enhet for gjensidig induktans: $[M] = [\phi_m/I] = [BA/I] = \text{Tm}^2/\text{A} \equiv \text{H}$ (henry)

Gjensidig induksjon:

Tidsavhengig strøm $I_1(t)$ i sløyfe 1 gir tidsavhengig magnetisk fluks $\phi_2(t)$ gjennom sløyfe 2, og dermed indusert ems i sløyfe 2:

$$\mathcal{E}_2 = -d\phi_2/dt = -M dI_1/dt$$

Tilsvarende:

Tidsavhengig strøm $I_2(t)$ i sløyfe 2 gir tidsavhengig magnetisk fluks $\phi_1(t)$ gjennom sløyfe 1, og dermed indusert ems i sløyfe 1:

$$\mathcal{E}_1 = -d\phi_1/dt = -M dI_2/dt$$

Selvinduktans

Magnetisk fluks ϕ gjennom lukket sløyfe på grunn av elektrisk strøm I i sløyfa er proporsjonal med strømstyrken I :

$$\phi = L I$$

L = sløyfas *selvinduktans* (geometrisk faktor)

Selvinduksjon:

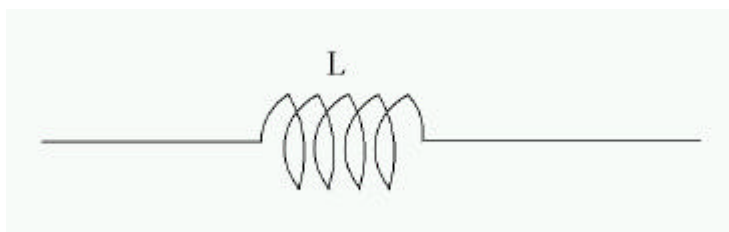
Tidsavhengig strøm $I(t)$ i sløyfe gir tidsavhengig magnetisk fluks $\phi(t)$ gjennom sløyfa, og dermed indusert ems i sløyfa:

$$\mathcal{E} = -d\phi/dt = -L dI/dt$$

Fortegn (dvs retning) på indusert ems bestemt av Lenz' lov: Indusert ems *motvirker endringen* i strømmen I .

SI-enhet for selvinduktans: $[L] = [M] = \text{H}$ (henry)

Kretssymbol for spole med selvinduktans L :



Krets med motstand og spole: RL-krets (R og L koblet i serie)

Tilkobling av spenningskilde V_0 ved tidspunkt $t = 0$

$\Rightarrow$ strøm $I(t) = (V_0/R) (1 - \exp(-Rt/L))$

Med andre ord: Strømstyrken nærmer seg sin maksimale verdi, V_0/R , eksponensielt som funksjon av tiden. "Tidsskalaen" for hvor raskt $I(t)$ når sin maksimale verdi er bestemt av tidskonstanten $\tau = L/R$. Jo større selvinduktans L , jo større blir den induserte "motspenningen" i spolen, $-L dI/dt$, og jo lenger tid tar det å "overvinne" denne motspenningen og oppnå stasjonær strøm V_0/R .

Utkobling av spenningskilden etter at stasjonær strøm V_0/R er etablert

$$\Rightarrow I(t) = (V_0/R) \exp(-Rt/L)$$

Med andre ord: Strømstyrken avtar eksponensielt mot null, men spolen prøver å motvirke at strømmen I blir mindre ved at det induseres en spenning i spolen, $-L \, dI/dt$, nå i samme retning som strømmen går, men altså *motsatt rettet strømindringen*. (Lenz' lov igjen...!)

Energi i magnetfelt

Tilført energi til en spole ved å øke strømstyrken fra 0 til I : $U_B = \frac{1}{2} LI^2$

Med utgangspunkt i en lang, tettviklet spole viste vi at dette kunne omskrives til en *magnetisk energitetthet* (dvs energi pr volumenhet) lik

$$u_B = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = B^2/(2\mu)$$

når spolen er fylt med et medium med permeabilitet μ . Det kan vises at dette gjelder generelt for vilkårlig magnetfelt.

Energi i elektromagnetisk felt

Fra før (25.11) har vi elektrisk energitetthet for elektrisk felt:

$$u_E = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

der vi har tatt høyde for at et eventuelt dielektrisk medium med permittivitet ϵ er til stede.

Dermed, med både elektrisk felt og magnetfelt til stede, har vi følgende totale energitetthet:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) = \frac{1}{2} (\epsilon E^2 + B^2/\mu)$$

Vekselstrømkretser og impedans

Vekselspenning: $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$

Frekvens: $f = \omega/2\pi$

Periode: $T = 1/f = 2\pi/\omega$

Amplitude: V_0

Impedans = "generalisert motstand": Uttrykker både

- *forholdet mellom amplituden* til påtrykt spenning, V_0 , og amplituden til resulterende strøm, I_0 , og
- *faseforskjellen* mellom påtrykt spenning og resulterende strøm, dvs fasevinkelen α dersom spenningen $V_0 \cos(\omega t)$ resulterer i strømmen $I_0 \cos(\omega t - \alpha)$.

For en resistans R har vi $I_0 = V_0/R$ og $\alpha = 0$, slik at impedansen for en resistans er $|Z| = R$ med fasevinkel $\alpha_R = 0$. Vi skal se i neste uke at det er hensiktsmessig å betrakte impedansen som en *kompleks* størrelse, $Z = |Z| \exp(i\alpha)$, der amplitudeforholdet V_0/I_0 er bestemt ved $|Z|$, mens faseforskjellen mellom $V(t)$ og $I(t)$ er gitt ved impedansens fasevinkel α .