

SIF4012 og MNFFY103 høst 2002: Sammendrag uke 47

(Alonso&Finn 27.10, 27.9)

Vekselstrømkretser og impedans

Impedans = "generalisert motstand": Uttrykker både

- forholdet mellom amplituden til påtrykt spenning, V_0 , og amplituden til resulterende strøm, $|I_0|$, og
- faseforskjellen mellom påtrykt spenning og resulterende strøm, dvs fasevinkelen α dersom spenningen $V_0 \cos(\omega t)$ resulterer i strømmen $|I_0| \cos(\omega t - \alpha)$.

Skreddersydd for kompleks notasjon:

Uttrykkes impedansen som en kompleks størrelse, $Z = |Z| \exp(i\alpha)$, er amplitudeforholdet $V_0/|I_0|$ bestemt ved $|Z|$, mens faseforskjellen mellom $V(t)$ og $I(t)$ er gitt ved impedansens fasevinkel α .

$$V = V_0 \exp(i\omega t) \quad (\text{Fysisk påtrykt spenning} = \text{Re } V = V_0 \cos(\omega t))$$

$$I = I_0 \exp(i\omega t) \\ = |I_0| \exp(-i\alpha) \exp(i\omega t) \quad (\text{Fysisk strømstyrke} = \text{Re } I = |I_0| \cos(\omega t - \alpha))$$

VR-krets:

$$I_0 = V_0/R \quad \text{dvs: } |I_0| = V_0/R, \alpha_R = 0$$

$$\text{Impedans: } Z = V/I = R \quad \text{dvs: } |Z| = R, \alpha_R = 0$$

VL-krets:

$$I_0 = V_0/(i\omega L) = (V_0/\omega L) \exp(-i\pi/2) \quad \text{dvs: } |I_0| = V_0/\omega L, \alpha_L = \pi/2$$

$$\text{Impedans: } Z = V/I = i\omega L \quad \text{dvs: } |Z| = \omega L, \alpha_L = \pi/2$$

VC-krets:

$$I_0 = i\omega C V_0 = \omega C V_0 \exp(i\pi/2) \quad \text{dvs: } |I_0| = \omega C V_0, \alpha_C = -\pi/2$$

$$\text{Impedans: } Z = V/I = 1/i\omega C \quad \text{dvs: } |Z| = 1/\omega C, \alpha_C = -\pi/2$$

RCL-krets: Drevne elektriske svingninger

Ser på krets med vekselspenningskilde $V_0 \cos(\omega t)$ påtrykt en seriekobling av en induktans L , en motstand R og en kapasitans C . Kirchhoffs spenningsregel gir dermed

$$V - L dI/dt = RI + Q/C$$

dvs. total elektromotorisk spenning i kretsen (venstre side) er lik summen av spenningsfall over motstanden og kondensatoren (høyre side). Med $I = dQ/dt$ fås

$$L d^2 Q/dt^2 + R dQ/dt + Q/C = V_0 \cos(\omega t)$$

Mekanisk analogi: Masse m opphengt i fjær med fjærkonstant k , samt dempningsmekanisme ("friksjon") med friksjonskoeffisient λ , påtrykt en harmonisk varierende kraft $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$. Newtons 2. lov, $F = ma = m d^2 x/dt^2$, gir da bevegelsesligningen (se Alonso og Finn, kapittel 10)

$$m d^2 x/dt^2 + \lambda dx/dt + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

som viser at den elektriske kretsen er analog den mekaniske, dersom m tilsvarer L ("treghet"), λ tilsvarer R ("motstand"), k tilsvarer $1/C$, x tilsvarer Q , og F_0 tilsvarer V_0 .

Den stasjonære løsningen (dvs: vi ser bort fra et eventuelt "innsvingningsforløp") bestemmes enklest ved å benytte kompleks notasjon:

$$V = V_0 \exp(i\omega t), Q = Q_0 \exp(i\omega t), I = I_0 \exp(i\omega t)$$

Dermed:

$$I = dQ/dt = i\omega Q, \text{ dvs } Q = I/i\omega$$

$$dI/dt = i\omega I$$

så innsatt i differensialligningen:

$$i\omega L I + R I + (1/i\omega C) I = V$$

$$V = (i\omega L + R + 1/i\omega C) I$$

$$= (Z_L + Z_R + Z_C) I$$

$$= Z I$$

Altså: Kretsens totale impedans Z er lik summen av impedansene til hvert enkelt seriekoblet kretselement.

Generelt gjelder,

for seriekobling av (komplekse) impedanser: $Z = \sum_i Z_i$

for parallellkobling av (komplekse) impedanser: $Z^{-1} = \sum_i Z_i^{-1}$

dvs: Nøyaktig som for serie- og parallellkobling av resistanser i en likestrømkrets!

For RCL-kretsen:

$$Z = R + i(\omega L - 1/\omega C)$$

Skriver generelt: $Z = R + iX$

der

$R = \text{Re } Z = \text{resistansen}$

$X = \text{Im } Z = \text{reaktansen}$

Med $Z = |Z| \exp(i\alpha)$ har vi dermed:

$$|Z| = (R^2 + X^2)^{1/2} \text{ og}$$

$$\tan \alpha = X/R, \text{ dvs } \alpha = \arctan(X/R)$$

Strømmen (kompleks notasjon) i kretsen blir:

$$I = V/Z = (V_0/(R + iX)) \exp(i\omega t) = V_0/(R^2 + X^2)^{1/2} \exp(i\omega t - i\alpha)$$

som betyr at den *fysiske, reelle* strømmen blir

$$\text{Re } I = V_0/(R^2 + X^2)^{1/2} \cos(\omega t - \alpha)$$

dvs, med

$$\text{amplitude } |I_0| = V_0/(R^2 + X^2)^{1/2} \text{ og}$$

$$\text{fasevinkel } \alpha = \arctan(X/R)$$

Effekttap i vekselstrømkretser

Ettersom V og I varierer med tiden, vil også den tilførte energien pr tidsenhet, dvs *effekten*, $P(t) = V(t)I(t)$ variere med tiden:

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t), I = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

$$P(t) = V_0 I_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t - \alpha)$$

Midlere effekt over en periode $T = 1/f = 2\pi/\omega$ blir dermed:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{V_0 I_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \omega t \cos(\omega t - \alpha) d\omega t$$

Produktet av de to cosinusfunksjonene: $\cos \omega t \cos(\omega t - \alpha) = 1/2 (\cos(2\omega t - \alpha) + \cos \alpha)$ (se f.eks. Rottmann). Siden integralet av en cosinusfunksjon over et helt antall perioder alltid blir lik null, fås null bidrag fra $\cos(2\omega t - \alpha)$. Dermed står vi igjen med:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos \alpha$$

Her er $\cos \alpha = R/|Z| = RI_0/V_0$, slik at får

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} RI_0^2$$

Med *effektivverdier* for strøm og spenning,

$$I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$$

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_0,$$

kan vi også skrive

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} RI_{\text{eff}}^2$$

Resonans

Strøamplituden I_0 , og dermed effekttapet $\langle P \rangle$, får sin maksimale verdi når reaktansen $X = 0$. Da blir $|Z| = R$, og det inntreffer ved vinkelfrekvensen ω_0 som bestemmes av

$$X(\omega_0) = \omega_0 L - 1/\omega_0 C = 0$$

dvs

$$\omega_0 = 1/(LC)^{1/2}$$

som kalles kretsens *resonansfrekvens*. Ved resonans blir fasevinkelen $\alpha = \arctan(X/R) = \arctan 0 = 0$, dvs strømmen svinger i fase med den påtrykte spenningen. Summen av indusert motspenning i induktansen, V_L , og spenningsfallet over kapasitansen, V_C , blir lik null, slik at vi står igjen med $V = RI$, dvs hele den påtrykte (veksel-)spenningen V finner vi igjen som spenningsfallet over motstanden R . Ved resonans blir altså strømmen den samme som om induktansen og kapasitansen ikke var til stede!

Fri svingninger, energibevarelse (RCL-krets uten spenningskilde)

(ikke forelest, men egentlig bare "generell" fysikk, kjent fra mekanikken!)

Merk at det er kun i kretsens *resistive* elementer (dvs: i motstanden(e)) at vi får et *effekttap*. Vi fant jo at for VL- og VC-kretsen ble faseforskyvningen mellom påtrykt spenning og resulterende strøm hhv $\pi/2$ og $-\pi/2$, slik at midlere effekt $\langle P \rangle = 0$.

En godt bilde av dette får en ved å se på en LC-krets, dvs kun en induktans L og kapasitans C i serie (ingen spenningskilde), f.eks. med startbetingelsen $Q(t=0) = Q_0$ og $I(0) = 0$. Kirchhoffs spenningsregel gir da $-L dI/dt = Q/C$, som med $I = dQ/dt$ kan omskrives til $d^2Q/dt^2 + \omega_0^2 Q = 0$ (med $\omega_0^2 = 1/LC$). Løsningen av denne ligningen er $Q(t) = Q_0 \cos \omega_0 t$, og dermed $I(t) = -\omega_0 Q_0 \sin \omega_0 t$. La oss se på energiforholdene i denne kretsen: Vi vet fra før at energien i kapasitansen er $U_C = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} Q^2/C$ når dens ledere har ladning $\pm Q$. Videre vet vi at energien til induktansen er $U_L = \frac{1}{2} L I^2$ når det går en strøm I gjennom den. Vi har dermed for LC-kretsen:

$U_C = \frac{1}{2} Q_0^2/C \cos^2 \omega_0 t$ og $U_L = \frac{1}{2} L \omega_0^2 Q_0^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} Q_0^2/C \sin^2 \omega_0 t$ (der vi brukte $\omega_0^2 = 1/LC$), slik at den totale energien må bli: $U_{\text{tot}} = U_C + U_L = \frac{1}{2} Q_0^2/C [\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t] = \frac{1}{2} Q_0^2/C$, altså *konstant*. Den totale energien består av "potensiell" energi U_C og "kinetisk" energi U_L , nøyaktig på samme måte som vi for en svingende masse m opphengt i en fjær med fjærkonstant k har en total energi bestående av potensiell energi $\frac{1}{2} k x^2$ i fjæra og kinetisk energi $\frac{1}{2} m (dx/dt)^2$ for massen. Har vi "ideelle", dempningsfrie systemer, vil systemene ikke "tape" noe av denne energien. Har vi i tillegg en motstand R , evt. friksjonskoeffisient λ (noe vi jo alltid har for et reelt system!), vil etterhvert energien gå tapt som varme. Fra det mekaniske tilfellet kjenner dere dette som *dempede svingninger*. På samme måte får vi dempede svingninger i den elektriske kretsen, med eksponentielt avtagende amplituder for strømmen I og ladningen Q . Vinkelfrekvensen for en slik dempet svingning blir $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, og for det mekaniske systemet beskrives massens utsving matematisk på formen $x(t) = x_0 \exp(-\gamma t) \cos(\omega t + \alpha)$, der *dempningskonstanten* er $\gamma = \lambda/2m$. (Se f.eks. Alonso og Finn, 10.13) I den elektriske kretsen beskrives I og Q på samme matematiske form, med dempningskonstant $\gamma = R/2L$. (Husk analogien: $\lambda \Leftrightarrow R$, $m \Leftrightarrow L$) Energibevarelse for fri, dempede svingninger i en slik RCL-krets uten påtrykt spenningskilde uttrykkes dermed slik:

$$U_{\text{tot}} = U_C + U_L + \int_0^t P(t) dt = \frac{1}{2} Q^2/C + \frac{1}{2} L I^2 + \int_0^t P(t) dt, \text{ der } P(t) = V_R(t)I(t) = RI(t) I(t) = RI(t)^2.$$

På grunn av dempningen, uttrykt ved faktoren $\exp(-\gamma t)$, må både Q og I gå mot null når $t \rightarrow \infty$. Det betyr igjen at hele den opprinnelige energien, $U(0) = \frac{1}{2} Q_0^2/C$, må være tapt som varme i motstanden:

$$\int_0^\infty P(t) dt = \frac{1}{2} Q_0^2/C.$$