NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

KONTINUASJONSEKSAMEN TEP4145 KLASSISK MEKANIKK
Torsdag 16. august 2007 kl. 1200 - 1600
Norsk utgave

Hjelpemiddel: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språk).
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU. (HP30S eller lignende.)

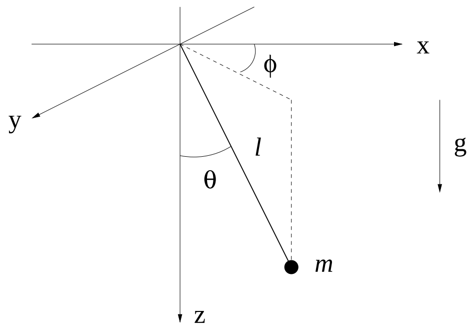
Side 2 - 6: Oppgavene
Side 7: Noen formler

Prøven består av 5 oppgaver. Det er angitt hvor mye de ulike oppgavene i utgangspunktet vil telle under vurderingen. Gjør oppgavene 1, 2 og 3, samt enten oppgave 4 (fysikk) eller oppgave 5 (teknisk kybernetikk).
Merk at Einsteins summekonvensjon, dvs summasjon over gjentatte indekser, benyttes, med mindre noe annet er spesifisert.

Sensuren kommer i løpet av august.

OPPGAVE 1 [Teller 30%]

En sfærisk pendel består av en masse m i enden av ei masseløs stang med lengde l. Den andre enden av stanga er festet i origo. Massen kan med andre ord bevege seg på et kuleskall med radius l, derav navnet. Systemet befinner seg i tyngdefeltet.



a) Vis at systemets lagrangefunksjon er

$$L = \frac{ml^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta\right) + mgl\cos\theta$$

når vi velger $V = 0$ i $z = 0$, og generaliserte koordinater θ og ϕ som vist i figuren.

b) Forklar hvorfor du uten videre kan fastslå at den generaliserte impulsen p_ϕ er en bevegelseskonstant og vis at p_ϕ er identisk med dreieimpulsens z-komponent $(\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v})_z$.

c) Innfør den konstante størrelsen

$$\gamma = \dot{\phi}\sin^2\theta = \frac{p_\phi}{ml^2}$$

og vis at lagrangeligningen for koordinaten θ blir

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta - \gamma^2\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} = 0$$

d) En mulighet er at pendelen foretar en horisontal sirkelbevegelse, med konstant $\theta = \theta_0$. Vis at perioden (omløpstiden) da blir

$$T_\phi = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta_0}{g}}$$

e) En annen mulighet er at pendelen "slingrer" omkring θ_0, dvs $\theta(t) = \theta_0 + \alpha(t)$. Anta kun liten grad av slingring, dvs $|\alpha| \ll \theta_0$ (og dermed også $|\alpha| \ll 1$), og vis at pendelens bevegelse beskrives av ligningen

$$\ddot{\alpha} + \alpha\,\frac{g}{l}\cos\theta_0\left(4 + \tan^2\theta_0\right) = 0$$

f) Hva blir "slingreperioden" T_α? Regn ut forholdet mellom omløpstiden og slingreperioden, dvs T_ϕ/T_α, og skisser dette forholdet som funksjon av vinkelen θ_0.

OPPGAVE 2 [Teller 30%]

En partikkel med masse m beveger seg i et kulesymmetrisk potensial ("sentralfelt") $V(r)$. Det kan da vises at bevegelsen foregår i et plan normalt på retningen til dreieimpulsen $\boldsymbol{L}$, som er en bevegelseskonstant, med $|\boldsymbol{L}| = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}| = l$.

a) Bestem partikkelens lagrangefunksjon $L = T - V$ (må ikke forveksles med dreieimpulsen $\boldsymbol{L}$), med polarkoordinater r og θ som generaliserte koordinater.

b) Vis at lagrangeligningen for θ blir

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0.$$

Vis at dette nettopp uttrykker dreieimpulsens bevarelse.

c) Vis at lagrangeligningen for r blir

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = f(r),$$

der $f(r) = -\partial V/\partial r$ er kraften som virker på partikkelen.

d) Bruk ligningene og opplysningene gitt så langt til å utlede følgende differensialligning for $u = 1/r$:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{l^2u^2}\,f(1/u)$$

e) Dersom partikkelen beveger seg i et $1/r$-potensial, vil banen som kjent beskrives av kjeglesnittet

$$r(\theta) = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon\cos\theta},$$

der α og ε er konstanter. Bruk "baneligningen" i punkt *d*) til å verifisere dette. (Anta $V(\infty) = 0$.)

f) Anta nå at partikkelen følger en spiralformet bane

$$r(\theta) = r_0 e^{\theta},$$

der r_0 er en konstant. Bestem potensialet $V(r)$ som denne partikkelen beveger seg i.
(Anta også her at $V(\infty) = 0$.)

OPPGAVE 3 [Teller 15%.]

En endimensjonal *anharmonisk* oscillator kan beskrives med lagrangefunksjonen

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2 - \alpha x^3 + \beta x \dot{x}^2$$

der oscillatorens masse er satt lik 1.

a) Hva er den anharmoniske oscillatorens hamiltonfunksjon $H(x, p)$?

En endimensjonal *harmonisk* oscillator kan beskrives med lagrangefunksjonen

$$L_0 = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2$$

og hamiltonfunksjonen

$$H_0 = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2.$$

b) Sett

$$L = L_0 + \delta L$$

og

$$H = H_0 + \delta H$$

for den anharmoniske oscillatoren og vis at for små oscillasjoner (dvs $|\alpha x| \ll \omega^2$ og $|\beta x| \ll 1$) er "avvikene" i L og H like store men med motsatt fortegn, dvs

$$\delta L = -\delta H.$$

OPPGAVE 4 [For fysikkstudentene, teller 25%.]

En mulig lagrangefunksjon for en relativistisk partikkel med masse m som beveger seg i et konservativt potensial $V(x_i)$ er

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} - V$$

a) Vis at denne lagrangefunksjonen gir lagrangeligninger som tilsvarer en generalisert variant av Newtons 2. lov,

$$\frac{d}{dt}\,p_i = F_i$$

Her er p_i romlige komponenter $(i = 1, 2, 3)$ av firerimpulsen p_μ.

b) Vis at hamiltonfunksjonen

$$H = v_i p_i - L$$

da tilsvarer partikkelens totale energi.

La partikkelen være et elektron med masse $m = m_e$ og ladning $q = -e$ som starter i origo med null hastighet ved $t = 0$, og la potensialet representere et uniformt elektrisk felt rettet langs $-\hat{x}$, dvs

$$V(x) = qE_0 x$$

c) Sett opp lagrangeligningen for elektronet og vis at dets hastighet blir

$$\dot{x} = \frac{eE_0 t/m_e}{\sqrt{1 + (eE_0 t/m_e c)^2}}$$

d) Løs ligningen og bestem elektronets bane $x(t)$. Kontroller at svaret er fornuftig, både for små og store verdier av t.

OPPGAVE 5 [For kybernetikkstudentene, teller 25%.]

a) Den aller enkleste differensligningen er gitt ved relasjonen

$$a_{n+1} = r\, a_n,$$

der $n \geq 0$ mens r er et reelt tall. Anta at verdien a_0 er kjent, og skriv ned uttrykket for den generelle a_n.

b) En representasjon av den lineære, homogene differensligningen av annen orden er

$$a_{n+1} = b\, a_n + c\, a_{n-1},$$

der $n \geq 1$ mens b og c er reelle tall. Sett som prøveløsning

$$a_n = C\, r^n,$$

og utled direkte fra differensligningen den karakteristiske annengradsligningen.

c) Anta at det er to distinkte røtter r_1 og r_2 for annengradsligningen i punkt b). Det oppgis at alle følger

$$a_n = c_1\, r_1^n + c_2\, r_2^n,$$

der c_1 og c_2 er konstanter, er løsninger av

$$a_{n+1} = b\, a_n + c\, a_{n-1}.$$

Sett opp et system for de to ukjente koeffisientene c_1 og c_2, og bestem eksplisitte uttrykk for c_1 og c_2, dvs uttrykt ved de kjente størrelsene r_1, r_2, a_0 og a_1. (HINT: Bruk gjerne Cramers regel ved løsning av systemet med de to ukjente.)

d) Betrakt følgen $\{F_n\}$ av Fibonaccitall, definert ved

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

der $F_0 = F_1 = 1$. Gitt at

$$F_n = C_1\, r_1^n + C_2\, r_2^n,$$

bestem de to distinkte røttene r_1 og r_2 ved å løse den tilhørende karakteristiske annengradsligningen. (HINT: Denne ligningen kan løses direkte ut fra analysen i punkt b).)

Noen formler

Formlenes gyldighet og symbolenes betydning antas å være kjent.

- Hamiltons ligninger:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

- Lagranges ligninger:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

- Lorentzfaktor:

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} \quad , \quad \beta = v/c$$

- Firervektor:

$$x_\mu = (\boldsymbol{r}, ict)$$

- Egentid τ definert ved:

$$dx_\mu \, dx_\mu = -c^2 \, d\tau^2$$

- Firerhastighet:

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \gamma(\boldsymbol{v}, ic)$$

- Firerimpuls:

$$p_\mu = m \, u_\mu = \gamma(m\boldsymbol{v}, imc)$$

- Firerpotensial:

$$A_\mu = (\boldsymbol{A}, i\phi/c)$$

- Elektromagnetisk felt:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$
$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

- Lorentztransformasjon (med relativ hastighet $\boldsymbol{v} = v\hat{x}$):

$$L_{22} = L_{33} = 1 \;\; , \;\; L_{11} = L_{44} = \gamma \;\; , \;\; L_{14} = -L_{41} = i\beta\gamma$$

- Trigonometriske relasjoner:

$$\begin{aligned}\cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \\ \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \cos a \sin b\end{aligned}$$

- For $|x| \ll 1$ gjelder:

$$(1+x)^n \simeq 1 + nx \qquad \cos x \simeq 1 \qquad \sin x \simeq x$$