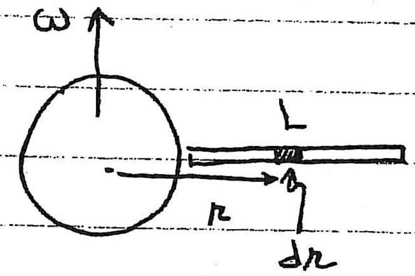
KLASSISK MEKANIKK

Løsning Øving 10 a)



I det roterende koordinatsystem er sentrifugalkraften på et element av lengde dr i avstand r fra sentrum lik $r\omega^2 \cdot \rho\, dr$, hvor ρ er stavens masse per lengdeenhet. Gravitasjonstiltrekningen på elementet er

$$\frac{GM\cdot\rho\, dr}{r^2} = \frac{GM}{R^2}\cdot\frac{R^2}{r^2}\rho\, dr = g_0 \cdot \frac{R^2}{r^2}\rho\, dr,$$

hvor $GM/R^2 = g_0$ er tyngdens akselerasjon ved jordoverflaten.

Kraftbalanse ved likevekt gir ved integrasjon

$$\int_R^{R+L} r\omega^2 \rho\, dr = g_0 R^2 \rho \int_R^{R+L} \frac{dr}{r^2}$$

ɔ: $$\frac{1}{2}\rho\omega^2\left[(R+L)^2 - R^2\right] = g_0 R^2 \rho\left(\frac{-1}{R+L} + \frac{1}{R}\right)$$

$$\frac{1}{2}\omega^2(2R+L)(R+L) = g_0 R$$

$$L^2 + 3RL + \left(2R^2 - \frac{2g_0 R}{\omega^2}\right) = 0$$

Løst som 2. grads ligning gir dette

$$L = -\frac{3R}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + \frac{8g_0R}{\omega^2}}.$$

$R = 6400$ km, $\omega = \frac{2\pi}{1\,\text{døgn}} = 7{,}27\cdot 10^{-5}\,s^{-1}$, $g_0 = 9{,}8\ m\,s^{-2}$

$\Rightarrow$ $\underline{L = 1{,}5\cdot 10^{5}\ \text{km}}$. Omtrent halvveis til månen.

KLASSISK MEKANIKK

Løsning Øving 10 b

$x'y'z' \to (123)$. Av

$\omega_1 = \dot\varphi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta\cos\psi$, $\omega_2 = \dot\varphi\sin\theta\cos\psi - \dot\theta\sin\psi$, $\omega_3 = \dot\varphi\cos\theta + \dot\psi$ får

$\underline{T} = \frac{1}{2}I_1(\omega_1^2+\omega_2^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 = \frac{1}{2}I_1\left[(\dot\varphi\sin\theta\sin\psi + \dot\theta\cos\psi)^2 + \right.$
$\left. + (\dot\varphi\sin\theta\cos\psi - \dot\theta\sin\psi)^2\right] + \frac{1}{2}I_3(\dot\varphi\cos\theta+\dot\psi)^2 = \underline{\frac{1}{2}I_1(\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)^2}$.

Ingen gravitasjon: $L = T - U = T = E$ (total energi).

Kanoniske impulser

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = (I_1\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta)\dot\varphi + I_3\dot\psi\cos\theta = \text{konst.}$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = I_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta) = \text{konst}$$

(φ og ψ er sykliske koordinater, dvs. inneholdes ikke i L). Kan sees av Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \Rightarrow \dot p_\varphi = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\psi} - \frac{\partial L}{\partial\psi} = 0 \Rightarrow \dot p_\psi = 0.$$

p_φ = dreieimpulskomponent tilsvarende rotasjon omkring z-aksen (fast koordinatsystem), dvs. $p_\varphi = L_z$, mens p_ψ tilsvarer rotasjon omkring x_3-aksen, dvs. $p_\psi = L_3$. (Goldstein s. 59.)

Av ligningene

$(I_1\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta)\dot\varphi + I_3\dot\psi\cos\theta = L_z$, $I_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta) = L_3$ får

$$\underline{\dot\varphi = \frac{L_z - L_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}}, \quad \underline{\dot\psi = \frac{L_3}{I_3} - \frac{L_z - L_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}\cdot\cos\theta}$$

$$E = \frac{1}{2}I_1\dot\theta^2 + \frac{1}{2}I_1\dot\varphi^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}I_3\left(\frac{L_3}{I_3}\right)^2.$$

Innsetting for $\dot\varphi$ gir

$$\underline{E = \frac{1}{2}I_1\dot\theta^2 + \frac{1}{2I_1\sin^2\theta}(L_z - L_3\cos\theta)^2 + \frac{L_3^2}{2I_3}}$$