

KLASSISK MEKANIKK

Løsning Døing 9

1. Energibalanse $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 = E$ sammen med bevarelse av dreiemoment $l = m r^2 \dot{\theta}$ gir

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \left(V + \frac{l^2}{2 m r^2} \right) = E$$

Altså $\hat{=}$ endimensjonelt problem, med $V' = V + \frac{l^2}{2 m r^2}$

Betingelse for at partikkelen faller inn mot sentrum:

At $\textcircled{1}$ følger $V + l^2/(2 m r^2) < E$ eller $r^2 V + l^2/2 m < E r^2$

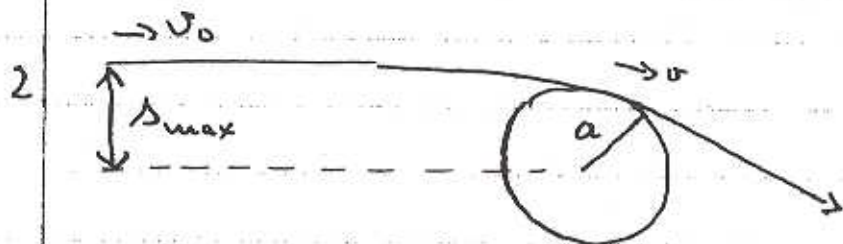
Når $r \rightarrow 0$ vil høyre side $\rightarrow 0$, slik at betingelsen blir

$$\left. r^2 V \right|_{r \rightarrow 0} < - l^2/2 m$$

Det betyr at enten må

$V(r) \rightarrow -K/r^2$ med $K > l^2/2 m$, eller

$V(r) \rightarrow -\frac{A}{r^n}$ med $n > 2$, hvor A er en positiv konstant.



Grensetilfelle p o figuren: Partikkelen tangenter overflaten.

Bevarelse av total energi:

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{k}{a} \quad \textcircled{1}$$

Bevarelse av dreiemoment: $l = m v_0 \delta_{\max} = m v a$, $\textcircled{2}$

hvor siste ledd er regnet ut i tangeringspunktet.

At $\textcircled{2}$: $v = \frac{\delta_{\max}}{a} v_0$, som innsett i $\textcircled{1}$ gir

$$\delta_{\max} = \sqrt{a^2 + 2ka/(m v_0^2)}$$

Alle partikler med støtparameter $b < \delta_{\max}$ treffer

overflaten $\Rightarrow \sigma_{\text{eff}} = \pi \delta_{\max}^2 = \pi \left(a^2 + 2ka/(m v_0^2) \right)$

Öving 9,
forts.

$$3. \quad L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - V(r, \theta, z).$$

Lagrange: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, $L = L(q, \dot{q})$, där

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, \quad m\ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

Hamilton: $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, $H = H(p, q)$,

$$H = T + V = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + p_z^2\right) + V(r, \theta, z), \text{ där}$$

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \quad p_z = m\dot{z};$$

$$\dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r}, \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$
