

Oppg. 1

KLASSISK MEKANIK Løsning Øving 10

(Litt annen notasjon i
øringsteksten, men det går
sikkert bra!)

Med bevegelseslign. $\sum_{j=1}^3 (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) A_j = 0$, hvor $y_i = A_i e^{-i\omega t}$, $A_i = C_\alpha \Delta_{i\alpha}$,

for $\sum_{j=1}^3 (V_{ij} - \omega_\alpha^2 T_{ij}) C_\alpha \Delta_{j\alpha} = 0$ for svingemoden α . Altså

$$\textcircled{1} \quad \sum_{j=1}^3 (V_{ij} - \omega_\alpha^2 T_{ij}) \Delta_{j\alpha} = 0, \quad \alpha = (1, 2, 3)$$

Fra forelesningene er

$$V - \omega_\alpha^2 T = \begin{pmatrix} k - \omega_\alpha^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega_\alpha^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega_\alpha^2 m \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

Da gir $\textcircled{1}$ følgende ligningssett:

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} (k - \omega_\alpha^2 m) \Delta_{1\alpha} - k \Delta_{2\alpha} = 0 \\ -k \Delta_{1\alpha} + (2k - \omega_\alpha^2 M) \Delta_{2\alpha} - k \Delta_{3\alpha} = 0 \\ -k \Delta_{2\alpha} + (k - \omega_\alpha^2 m) \Delta_{3\alpha} = 0 \end{cases}$$

Normeringen er

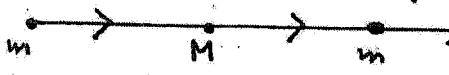
$$\sum_{ij=1}^3 T_{ij} \Delta_{i\alpha} \Delta_{j\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

Innsetting for T_{ij} i normeringsbetingelsen gir

$$\textcircled{3} \quad m \Delta_{1\alpha}^2 + M \Delta_{2\alpha}^2 + m \Delta_{3\alpha}^2 = 1, \quad \text{for } \beta = \alpha$$

1) Velg $\alpha = 1$. (Fra forelesn. er) $\omega_1 = 0$. Da gir $\textcircled{2}$: $\Delta_{11} = \Delta_{21} = \Delta_{31}$.

Normeringsbet. $\textcircled{3}$ gir da $\Delta_{11} = \Delta_{21} = \Delta_{31} = 1/\sqrt{\mu}$, ($\mu = 2m + M$)

 (Translasjon av alle 3 atomene)

2) $\alpha = 2$ (symmetrisk mode). Da er $\omega_2 = \sqrt{k/m}$, og $\textcircled{2}$ gir

$\Delta_{22} = 0$, $\Delta_{12} + \Delta_{32} = 0$. Normering $\textcircled{3}$ gir $m \Delta_{12}^2 + m \Delta_{32}^2 = 1$, slik at $\Delta_{12} = 1/\sqrt{2m}$, $\Delta_{22} = 0$, $\Delta_{32} = -1/\sqrt{2m}$.

 (C-atom i ro, O-atomene har motsatt fase)

3) $\alpha = 3$ (antisymmetrisk mode). Da er $\omega_3 = \sqrt{k\mu/(Mm)}$, $\Rightarrow$

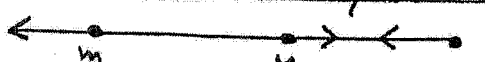
$(k - \omega_3^2 m) = -2km/M$, $(2k - \omega_3^2 M) = -kM/m$, slik at $\textcircled{2}$ gir

$$\frac{2m}{M} \Delta_{13} + \Delta_{23} = 0, \quad \Delta_{13} + \frac{M}{m} \Delta_{23} + \Delta_{33} = 0, \quad \Delta_{23} + \frac{2m}{M} \Delta_{33} = 0$$

$\Rightarrow \Delta_{33} = \Delta_{13}$, $\Delta_{23} = -\frac{2m}{M} \Delta_{13}$. Normeringen $\textcircled{3}$ gir

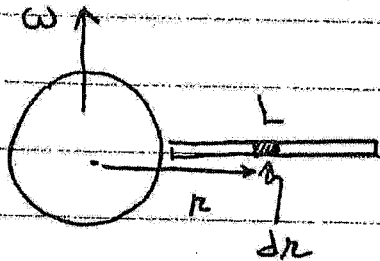
$$m \Delta_{13}^2 + M \Delta_{23}^2 + m \Delta_{33}^2 = 1. \quad \text{Dette gir}$$

$$\Delta_{13} = \sqrt{\frac{M}{2m\mu}}, \quad \Delta_{23} = -2\sqrt{\frac{m}{2M\mu}}, \quad \Delta_{33} = \sqrt{\frac{M}{2m\mu}}$$

 (O-atomene har samme amplitude, C-atomet har motsatt fase og annen amplitude.)

KLASSISK MEKANIK

Løsning Fysik 10, Oppgave 2



I det roterende koordinat-system er sentrifugalkraften på et element av lengde dr

i avstand r fra sentrum lik $r\omega^2 \cdot \rho dr$, hvor ρ er stavens masse per lengdeenhet.

Gravitasjonskraftene på elementet er

$$\frac{GM \cdot \rho dr}{r^2} = \frac{GM}{R^2} \cdot \frac{R^2}{r^2} \rho dr = g_0 \cdot \frac{R^2}{r^2} \rho dr,$$

hvor $GM/R^2 = g_0$ er tyngdens akselerasjon ved jordoverflaten.

Kraftbalanse ved likhet gir ved integrasjon

$$\int_R^{R+L} r\omega^2 \rho dr = g_0 R^2 \rho \int_R^{R+L} \frac{dr}{r^2}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \rho \omega^2 [(R+L)^2 - R^2] = g_0 R^2 \rho \left(\frac{-1}{R+L} + \frac{1}{R} \right)$$

$$\frac{1}{2} \omega^2 (2R+L)(R+L) = g_0 R$$

$$L^2 + 3RL + (2R^2 - \frac{2g_0 R}{\omega^2}) = 0$$

Løst som 2. grads ligning gir dette

$$L = -\frac{3R}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{R^2 + \frac{8g_0 R}{\omega^2}}$$

$$R = 6400 \text{ km}, \quad \omega = \frac{2\pi}{1 \text{ dag}} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}, \quad g_0 = 9,8 \text{ m s}^{-2}$$

$$\Rightarrow \underline{L = 1,5 \cdot 10^5 \text{ km}} \quad \text{Om høyt halvveis til månen.}$$