TEP4145 Klassisk mekanikk
Vår 2007

Øving 11, løsningsforslag

OPPGAVE 1

Dreieimpulsen er

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

Vi ser først på $[p_i, L_j]$ og starter med $i = j$, f.eks. $i = 1$:

$$\begin{aligned} [p_x, L_x] &= [p_x, yp_z - zp_y] \\ &= [p_x, y]p_z + [p_x, p_z]y - [p_x, z]p_y - [p_x, p_y]z \end{aligned}$$

Vi har

$$[p_i, x_j] = -\delta_{ij} \quad , \quad [p_i, p_j] = 0$$

og dermed

$$[p_x, L_x] = 0$$

Tilsvarende:

$$[p_y, L_y] = [p_z, L_z] = 0$$

Vi ser deretter på $[p_i, L_j]$ med $i \neq j$, f.eks. $i = 1$ og $j = 2$:

$$\begin{aligned} [p_x, L_y] &= [p_x, zp_x - xp_z] \\ &= [p_x, z]p_x + [p_x, p_x]z - [p_x, x]p_z - [p_x, p_z]x \\ &= 0 + 0 - (-1)p_z - 0 \\ &= p_z \end{aligned}$$

Syklisk ombytte av x, y, z gir deretter

$$[p_y, L_z] = p_x \quad , \quad [p_z, L_y] = p_z$$

Ombytte av indekser gir kun et fortegnsskifte, f.eks.

$$[p_z, L_y] = -p_x$$

Alt i alt:

$$[p_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} p_k$$

Med $L_j = \varepsilon_{jkl} x_k p_l$ får vi dette på direkten:

$$\begin{aligned} [p_i, L_j] &= [p_i, \varepsilon_{jkl} x_k p_l] \\ &= [p_i, x_k]\varepsilon_{jkl} p_l \\ &= -\delta_{ik}\varepsilon_{jkl} p_l \\ &= -\varepsilon_{jil} p_l \\ &= \varepsilon_{ijl} p_l \end{aligned}$$

Og da er vi vel i stand til å ta $[x_i, L_j]$ på samme måte:

$$\begin{aligned}
[x_i, L_j] &= [x_i, \varepsilon_{jkl} x_k p_l] \\
&= [x_i, p_l] \varepsilon_{jkl} x_k \\
&= \delta_{il} \varepsilon_{jkl} x_k \\
&= \varepsilon_{jki} x_k \\
&= \varepsilon_{ijk} x_k
\end{aligned}$$

OPPGAVE 2

Vi har Hamiltonfunksjonen

$$H = \frac{1}{2m} (\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2 + q\phi.$$

der $\boldsymbol{A}$ og ϕ er funksjoner av koordinatkomponentene x_i (men ikke de kanoniske impulskomponentene p_i). Hamiltons ligninger blir dermed

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\
&= \frac{1}{2m} \frac{\partial}{\partial p_i} (p_j - qA_j)(p_j - qA_j) \\
&= \frac{1}{2m} \delta_{ij} (p_j - qA_j) \cdot 2 \\
&= \frac{1}{m} (p_i - qA_i)
\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
\dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \\
&= -\frac{1}{m} (p_j - qA_j) \cdot (-q) \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - q \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \\
&= \frac{q}{m} (p_j - qA_j) \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - q \frac{\partial \phi}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

Her kan vi sette inn

$$p_j - qA_j = m\dot{x}_j$$

som gir

$$\dot{p}_i = q\dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - q \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

Vi har

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})]_i &= \varepsilon_{ijk} v_j \varepsilon_{klm} \partial_l A_m \\
&= \ldots \text{se kompendiet} \ldots \\
&= v_j \partial_i A_j - v_j \partial_j A_i
\end{aligned}$$

slik at

$$
\begin{aligned}
v_j \partial_i A_j &= [\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})]_i + v_j \partial_j A_i \\
&= (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_i + \dot{A}_i - \frac{\partial A_i}{\partial t}
\end{aligned}
$$

dvs

$$\dot{p}_i = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_i + q\dot{A}_i - q\frac{\partial A_i}{\partial t} - q\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

eller

$$\frac{d}{dt}\left(p_i - qA_i\right) = qE_i + q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_i$$

dvs

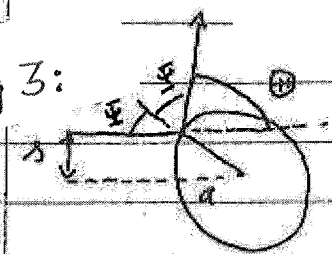
$$\frac{d}{dt}\left(m\boldsymbol{v}\right) = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

Og i følge Newton er jo venstre side her lik $\boldsymbol{F}$.

KLASSISK MEKANIKK,

Øving 11, Løsning

Oppg 3:



Spredningsvinkel Θ oppfyller $2\Psi + \Theta = \pi$

Av figuren er støtparameteren $s = a\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2}\right) =$

$\Rightarrow$: $|ds/d\Theta| = (a/2)\sin\Theta/2$.

$$\underline{\sigma(\Theta)} = \frac{s}{\sin\Theta}\left|\frac{ds}{d\Theta}\right| = \frac{a\cos\Theta/2}{\sin\Theta}\cdot\frac{a}{2}\sin\frac{\Theta}{2} = \underline{\frac{a^2}{4}}\text{, uavhengig av }\Theta.$$

Totalt tverrsnitt $\underline{\sigma} = 2\pi\int_0^{\pi}\sigma(\Theta)\sin\Theta\, d\Theta = \underline{\pi a^2}$, rimelig sva

Oppg 4:

Går ut fra $$\Theta = \pi - 2\int_0^{u_m}\frac{s\,du}{\sqrt{1 - \frac{V(u)}{E} - s^2u^2}},$$

hvor $u_m = 1/r_m$ er invers minste avstand.

$f = -dV/dr = k/r^3$ gir $V = \frac{1}{2}k/r^2 = \frac{1}{2}ku^2$, $\Longrightarrow$

$$\Theta = \pi - 2\int_0^{u_m}\frac{s\,du}{\sqrt{1 - \left(\frac{k}{2E} + s^2\right)u^2}} = \pi - 2\int_0^{u_m}\frac{s\,du}{\sqrt{1 - u^2/u_m^2}},\text{ hvor}$$

$$u_m = \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{2E} + s^2}}$$

Integrerer : $\Theta = \pi - 2su_m \left.\arcsin\frac{u}{u_m}\right|_0^{u_m} = \pi - \pi s u_m$.

Innfører $x = \Theta/\pi$:

$$x = 1 - \frac{s}{\sqrt{\frac{k}{2E} + s^2}}, \quad \frac{s^2}{\frac{k}{2E} + s^2} = (1-x)^2$$

$$s = \sqrt{\frac{k}{2E}}\frac{1-x}{\sqrt{2x - x^2}} = s(x, E).$$

Deriverer: $$\frac{ds}{dx} = -\sqrt{\frac{k}{2E}}\frac{1}{(2x - x^2)^{3/2}}$$

$$\sigma(\Theta) = \frac{s}{\sin\Theta}\left|\frac{ds}{d\Theta}\right| = \frac{s}{\pi\sin\pi x}\left|\frac{ds}{dx}\right| = \frac{1}{\pi\sin\pi x}\sqrt{\frac{k}{2E}}\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{\frac{k}{2E}}\frac{1}{(2x-x^2)}$$

$$\underline{\sigma(\Theta) = \frac{k}{2\pi E}\frac{1-x}{x^2(2-x)^2\sin\pi x}}$$