

Øving 12

Oppg 1 og 2

1. Energibalanse $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 = E$ sammen med bevarelse av dreieimpuls $l = m r^2 \dot{\theta}$ gir

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \left(V + \frac{l^2}{2mr^2} \right) = E$$

altså endimensjonelt problem, med $V' = V + \frac{l^2}{2mr^2}$

Betingelse for at partikkelen faller inn mot sentrum:

Av $\textcircled{1}$ følger $V + l^2/(2mr^2) < E$ eller $r^2 V + l^2/2m < E r^2$

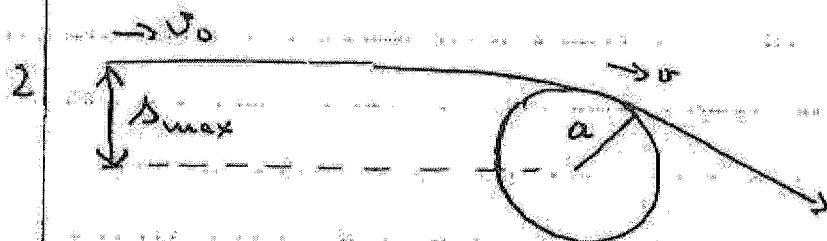
Når $r \rightarrow 0$ vil høyre side $\rightarrow 0$, slik at betingelsen blir

$$r^2 V \Big|_{r \rightarrow 0} < -l^2/2m$$

Det betyr at enten må

$V(r) \rightarrow -K/r^2$ med $K > l^2/2m$, eller

$V(r) \rightarrow -\frac{A}{r^n}$ med $n > 2$, hvor A er en positiv konstant.



Grensetilfelle på figuren: Partikkelen tangenter overflaten.

Bevarelse av total energi:

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{k}{a} \quad \textcircled{1}$$

Bevarelse av dreieimpuls: $l = m v_0 s_{\max} = m v a$, $\textcircled{2}$

hvor siste ledd er regnet ut i tangenteringspunktet.

Av $\textcircled{2}$: $v = \frac{s_{\max}}{a} v_0$, som innsett i $\textcircled{1}$ gir

$$s_{\max} = \sqrt{a^2 + 2ka/(m v_0^2)}$$

Alle partikler med støtparameter $s < s_{\max}$ treffer

overflaten $\Rightarrow \sigma_{\text{tot}} = \pi s_{\max}^2 = \pi (a^2 + 2ka/(m v_0^2))$

Oppg. 3, øving 12

$$1) \quad u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{\gamma(dt' + \frac{v}{c^2}dz')} = \frac{u_x'}{\gamma(1 + vu_z'/c^2)}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{u_y'}{\gamma(1 + vu_z'/c^2)}$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{\gamma(dz' + vdt')}{\gamma(dt' + \frac{v}{c^2}dz')} = \frac{u_z' + v}{1 + vu_z'/c^2}$$

Differensier:

$$du_x = \frac{du_x'}{\gamma(1 + vu_z'/c^2)} - \frac{u_x'}{\gamma(1 + vu_z'/c^2)^2} \cdot \frac{v}{c^2} du_z' \xrightarrow{(\vec{u}'=0)} \gamma^{-1} du_x'$$

Tilsvarende for $du_y = \gamma^{-1} du_y'$

$$du_z = \frac{du_z'}{1 + vu_z'/c^2} - \frac{u_z' + v}{(1 + \frac{vu_z'}{c^2})^2} \cdot \frac{v}{c^2} du_z' \rightarrow du_z - \frac{v^2}{c^2} du_z' = (1 - \beta^2) du_z'$$

Rs $dt = \gamma dt' (1 + \frac{v}{c^2} u_z')$ for $dt = \gamma dt'$

$$\Rightarrow \underline{a_x = \frac{du_x}{dt} = (1 - \beta^2) a_x'}, \text{ tilsvarende } \underline{a_y = (1 - \beta^2) a_y'}$$

$$\underline{a_z = \frac{du_z}{dt} = (1 - \beta^2)^{3/2} a_z'}$$

2)



$v^0 = \frac{dN}{dt^0}$, hvor dN er antall bølger emittert i tiden dt^0 i det instantane hvilesystemet S' .

En kan $dt^0 = d\tau$ (egen tiden til preperatet).

Hvis t er ^{observatørens} observert tid vil $dt = \gamma d\tau$.

Frekvensen ν målt i sentrum altså

$$\underline{\nu = \frac{dN}{dt} = \frac{dN}{\gamma d\tau} = \frac{\nu^0}{\gamma} = \frac{\nu^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}}, \quad \beta = \frac{u}{c}$$

Transversal Dopplereffekt.