**TEP4145 Klassisk mekanikk**
**Vår 2007**

# Øving 8, løsningsforslag

OPPGAVE 1

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - V(r,\theta,z)$$

Lagranges ligninger:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad L = L(q,\dot{q})$$

som gir

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 &= -\frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) + \frac{\partial V}{\partial \theta} &= 0 \\ m\ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

Hamiltons ligninger:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad H = H(p,q)$$

Hamiltonfunksjonen er

$$H = T + V = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + p_z^2\right) + V(r,\theta,z)$$

Her har vi brukt $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$, som gir

$$p_r = m\dot{r} \quad , \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta} \quad , \quad p_z = m\dot{z}$$

og deretter eliminert $\dot{q}_i$ fra uttrykket for $T$. Hamiltons ligninger blir

$$\dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \quad , \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial V}{\partial \theta} \quad , \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

De tre ligningene for $\dot{q}_i$ har vi allerede på plass, i og med uttrykkene for $p_i$.

OPPGAVE 2

*a*) Vi skal vise at $x(t)$ og $y(t)$ oppfyller ligningene

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\Omega\dot{y} + \omega_0^2 x &= 0 \qquad (1) \\ \ddot{y} + 2\Omega\dot{x} + \omega_0^2 y &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

der $\Omega = \omega \sin\theta$ og $\omega_0^2 = g/l$. Kreftene som virker på kula, målt i realfagbygg-systemet, er:

- tyngdekrafta $m\boldsymbol{g} = -mg\hat{z}$
- snordraget $\boldsymbol{S} = S_x\hat{x} + S_y\hat{y} + S_z\hat{z}$
- corioliskrafta $\boldsymbol{F}_{\text{cor}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$

Vi neglisjerer sentrifugalkrafta $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$.
Jordas vinkelhastighet er

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \sin\theta\ \hat{z} + \omega \cos\theta\ \hat{y}$$

Kulas hastighet er

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$$

Vi antar små utsving og kan da sette

$$S = |\boldsymbol{S}| \simeq mg$$

og dessuten anta at

$$\dot{z} \ll \dot{x}, \dot{y}$$

Vektorproduktet i coriolisleddet kan da tilnærmet skrives som

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} &\simeq (\omega \sin\theta\ \hat{z} + \omega\cos\theta\ \hat{y}) \times (\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}) \\ &= \dot{x}\omega\sin\theta\hat{y} - \dot{y}\omega\sin\theta\hat{x} - \dot{x}\omega\cos\theta\hat{z} \\ &= \Omega(\dot{x}\hat{y} - \dot{y}\hat{x}) - \dot{x}\omega\cos\theta\hat{z} \end{aligned}$$

Ser så på komponentene av snordraget. Når utsvinget fra origo er

$$\boldsymbol{r} = x\hat{x} + y\hat{y},$$

har vi (med vinkel $\beta$ mellom $z$-aksen og snora)

$$\begin{aligned} |S_x| &= S\sin\beta\sin\phi = S\frac{r}{l}\frac{x}{r} \simeq mg\frac{x}{l} \\ |S_y| &= S\sin\beta\cos\phi = S\frac{r}{l}\frac{y}{r} \simeq mg\frac{y}{l} \\ |S_z| &= S\cos\beta = S\frac{l-z}{l} \simeq mg\frac{l-z}{l} \end{aligned}$$

Horisontalkomponenten av $\boldsymbol{S}$ peker hele tiden inn mot origo, slik at vi må ha $S_x > 0$ når $x < 0$, tilsvarende for $S_y$, og omvendt når $x > 0$, alternativt $y > 0$. Dermed:

$$\begin{aligned} S_x &= -mgx/l = -m\omega_0^2 x \\ S_y &= -mgy/l = -m\omega_0^2 y \\ S_z &= mg(1 - z/l) \end{aligned}$$

Bevegelsesligningene for kula er

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{S} + \boldsymbol{F}_{\text{cor}}$$

For $x$-komponenten:

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + 2m\Omega\dot{y}$$

For $y$-komponenten:

$$m\ddot{y} = -m\omega_0^2 y - 2m\Omega\dot{x}$$

Og dette var nettopp hva vi skulle vise, for bevegelsen i $xy$-planet.

*b*) Med $u = x + iy$:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{x} + i\dot{y} \\ \ddot{u} &= \ddot{x} + i\ddot{y} \end{aligned}$$

Multipliser ligning (2) med $i$ og legg sammen med ligning (1). Det gir

$$\ddot{x} + i\ddot{y} + 2i\Omega(\dot{x} + i\dot{y}) + \omega_0^2(x + iy) = 0$$

dvs

$$\ddot{u} + 2i\Omega\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

*c*) Prøver $u \sim \exp(\alpha t)$ som løsning. Innsatt gir det

$$\alpha^2 + 2i\Omega\alpha + \omega_0^2 = 0$$

som har løsninger

$$\begin{aligned} \alpha &= -i\Omega \pm i\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2} \\ &\simeq -i\Omega \pm i\omega_0 \end{aligned}$$

ettersom $\omega_0 \gg \Omega$. Generell løsning for $u$ er dermed

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{i\Omega t}\left(Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}\right) \\ &= Ce^{-i\Omega t}\cos(\omega_0 t + \gamma) \end{aligned}$$

Den kompleks konjugerte av $u$ er da

$$u^*(t) = C^* e^{i\Omega t}\cos(\omega_0 t + \gamma)$$

Ettersom $u = x + iy$, og dermed $u^* = x - iy$, finner vi

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(u + u^*) = \cos(\omega_0 t + \gamma) \cdot \Re\left\{Ce^{-i\Omega t}\right\} \\ y &= \frac{1}{2i}(u - u^*) = \cos(\omega_0 t + \gamma) \cdot \Im\left\{Ce^{-i\Omega t}\right\} \end{aligned}$$

Med de gitte startbetingelsene $x = y = 0$ ved $t = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \cos\gamma \cdot \Re C \\ 0 &= \cos\gamma \cdot \Im C \end{aligned}$$

Ettersom vi ikke kan ha $C = 0$ (da blir $u = 0$), må vi ha $\cos\gamma = 0$, dvs $\gamma = \pi/2$, og dermed $\cos(\omega_0 t + \gamma) = \sin\omega_0 t$. Deretter regner vi ut $\dot{x}$ og $\dot{y}$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega_0 \cos\omega_0 t \Re\left\{Ce^{-i\Omega t}\right\} + \sin\omega_0 t \Re\left\{-i\Omega Ce^{-i\Omega t}\right\} \\ \dot{y} &= \omega_0 \cos\omega_0 t \Im\left\{Ce^{-i\Omega t}\right\} + \sin\omega_0 t \Im\left\{-i\Omega Ce^{-i\Omega t}\right\} \end{aligned}$$

Setter inn $\dot{x} = v_0$ og $\dot{y} = 0$ ved $t = 0$:

$$\begin{aligned} v_0 &= \omega_0 \Re C \\ 0 &= \omega_0 \Im C \end{aligned}$$

som gir

$$\begin{aligned} \Im C &= 0 \\ \Re C &= \frac{v_0}{\omega_0} \end{aligned}$$

Hele løsningen blir

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin\omega_0 t \cdot \Re\left\{\frac{v_0}{\omega_0} e^{-i\Omega t}\right\} = \frac{v_0}{\omega_0} \cos\Omega t \sin\omega_0 t \\ y(t) &= \sin\omega_0 t \cdot \Im\left\{\frac{v_0}{\omega_0} e^{-i\Omega t}\right\} = -\frac{v_0}{\omega_0} \sin\Omega t \sin\omega_0 t \end{aligned}$$

som tilsvarer en harmonisk svingning i $xy$-planet, med vinkelfrekvens $\omega_0$, og der svingeplanet roterer med klokka, og en hel gang rundt på tiden

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega \sin\theta} \simeq 26.8 \text{ h}$$