TEP4145 Klassisk mekanikk
Vår 2007

Øving 9, løsningsforslag

OPPGAVE 1

Treghetsmatrisen $\boldsymbol{I}$ er gitt ved

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I}\,\boldsymbol{\omega}$$

der $\boldsymbol{L}$ er dreieimpulsen og $\boldsymbol{\omega}$ er vinkelfrekvensen, begge vektorer. Fra utgangspunktet (med ren rotasjon og sum over repetert indeks i, som tilsvarer masse nr i),

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L} &= \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i \\
&= \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i \\
&= m_i \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)
\end{aligned}$$

fant vi i forelesningene

$$\boldsymbol{L} = m_i \left[r_i^2\, \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}_i \right]$$

Det gir, for komponentene av $\boldsymbol{I}$:

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= m_i(r_i^2 - x_i^2) = m_i(y_i^2 + z_i^2) \\
I_{yy} &= m_i(r_i^2 - y_i^2) = m_i(x_i^2 + z_i^2) \\
I_{zz} &= m_i(r_i^2 - z_i^2) = m_i(x_i^2 + y_i^2) \\
I_{xy} &= -m_i x_i y_i = I_{yx} \\
I_{xz} &= -m_i x_i z_i = I_{zx} \\
I_{yz} &= -m_i y_i z_i = I_{zy}
\end{aligned}$$

a) Relativt til aksene x, y, z:

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= Ma^2 + Ma^2 + ma^2 + ma^2 = 2(m+M)a^2 \\
I_{yy} &= 2(m+M)a^2 \\
I_{zz} &= 4(m+M)a^2 \\
I_{xy} &= I_{yx} = -Ma^2 - M(-a)^2 - ma(-a) - m(-a)a = 2(m-M)a^2 \\
I_{xz} &= I_{zx} = I_{yz} = I_{zy} = 0
\end{aligned}$$

b) Relativt til aksene x', y', z':

$$\begin{aligned}
I_{x'x'} &= 2M(\sqrt{2}a)^2 = 4Ma^2 \\
I_{y'y'} &= 2m(\sqrt{2}a)^2 = 4ma^2 \\
I_{z'z'} &= 4(m+M)a^2 \\
I_{x'y'} &= I_{y'x'} = 0 \\
I_{x'z'} &= I_{z'x'} = I_{y'z'} = I_{z'y'} = 0
\end{aligned}$$

dvs diagonal.

OPPGAVE 2

Posisjonen til kulas massesenter:

$$\boldsymbol{R}_{\text{CM}} = \frac{\int \boldsymbol{r} \rho d^3 r}{\int \rho d^3 r}$$

der integralene går over kula, der vi har masse. Hvis vi hadde ei kule uten hulrom, ville integralet i telleren bli null. Når vi som her *har* et hulrom, må integralet i telleren bli lik

$$-\int_{\text{hulrom}} \boldsymbol{r} \rho d^3 r$$

der integralet nå går over der hulrommet er. Verdien av dette integralet må være lik massen m som er "fjernet" multiplisert med massesenterposisjonen til massen som er fjernet:

$$\int_{\text{hulrom}} \boldsymbol{r} \rho d^3 r = m(R - r)\hat{z}$$

Nevneren i uttrykket for $\boldsymbol{R}_{\text{CM}}$ må ha verdien $M - m$, der M er kulas masse før vi lagde hulrommet, dvs tok bort massen m. Dermed:

$$\boldsymbol{R}_{\text{CM}} = -\frac{m}{M - m}\ (R - r)\ \hat{z}$$

slik at

$$z_0 = \frac{r^3}{R^3 - r^3}\ (R - r)$$

Treghetsmomentet med hensyn på z-aksen (kaller her I_{zz} for I_z osv):

$$I_z = \int \rho \left(x^2 + y^2\right) d^3 r$$

Dette må vi kunne skrive som treghetsmomentet til ei hel kule med radius R minus tilsvarende for ei kule med radius r:

$$I_z = \frac{2}{5} M R^2 - \frac{2}{5} m r^2 = \frac{8}{15} \pi \rho \left(R^5 - r^5\right)$$

der vi har brukt

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \rho$$

og

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho$$

På grunn av sylindersymmetri omkring z-aksen, må vi ha

$$I_x = I_y$$

slik at det er nok å regne ut en av disse. La x-aksen gå gjennom CM, dvs i avstand z_0 nedenfor kulas geometriske sentrum (og selvsagt normalt på z-aksen). Vi kan nå kombinere Steiners sats med det faktum at I_x for kula med hulrom må være lik differansen mellom I_x^R for ei hel kule uten hulrom og I_x^r for den lille kula som er fjernet. Dermed:

$$
\begin{aligned}
I_x &= I_x^R - I_x^r \\
&= \left(\frac{2}{5}MR^2 + Mz_o^2\right) - \left(\frac{2}{5}mr^2 + m\left(z_0 + R - r\right)^2\right) \\
&= \ldots \text{etter litt regning} \ldots \\
&= \frac{4}{3}\pi\rho\left[\frac{2}{5}\left(R^5 - r^5\right) - \frac{(R-r)^2 r^3 R^3}{R^3 - r^3}\right]
\end{aligned}
$$