TFY4104 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2013.
Løsningsforslag til øving 13.

Oppgave 1

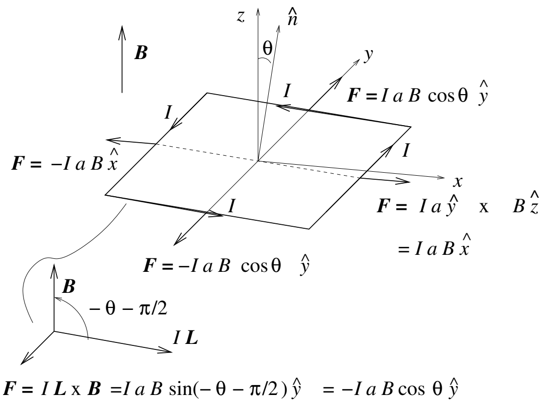
a) Sløyfas magnetiske dipolmoment:

$$\boldsymbol{m} = IA\,\hat{n} = Ia^2\,\hat{n}$$

Sløyfa består av 4 rette ledere med lengde a, der to og to har strømmen gående i motsatt retning. Dermed blir den magnetiske kraften

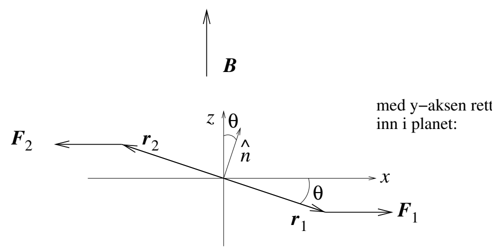
$$\boldsymbol{F} = I\int d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B} = I\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B}$$

motsatt rettet, men like stor i absoluttverdi, for slike par av rette lederbiter. Den totale kraften på sløyfa blir dermed null. Noen detaljer er inkludert i figuren:



Vi ser av figuren at kreftene fra magnetfeltet ville ha deformert strømsløyfa dersom det hadde vært en mulighet. For ei makroskopisk strømsløyfe er dette som regel en neglisjerbar effekt, men dersom strømsløyfa er en klassisk modell av et elektron i bane rundt en atomkjerne, aner vi at *i tillegg* til en innretting av strømsløyfa (som vi skal se på i resten av denne oppgaven), vil magnetfeltet påvirke selve banebevegelsen til elektronet rundt kjernen. Med andre ord: Atomets magnetiske moment endres både i *retning* og i *absoluttverdi*. Førstnevnte effekt er *paramagnetisme*, sistnevnte effekt er *diamagnetisme*. Her konsentrerer vi oss om orienteringen av $\boldsymbol{m}$.

b) Av figuren over ser vi at de to strømmene som går parallelt med xz-planet påvirkes av krefter i hhv positiv og negativ y-retning. Disse kreftene vil da ikke bidra til dreiemomentet omkring y-aksen.
Kreftene som virker på strømmene som går parallelt med y-aksen gir tilsammen et dreiemoment (se figuren nedenfor og ovenfor)



$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \sum \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}\\ &= -r_1F_1\sin\theta\;\hat{y} - r_2F_2\sin\theta\;\hat{y}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -2 \cdot \frac{a}{2} \cdot IaB \sin\theta \, \hat{y} \\
&= -Ia^2 \cdot B \sin\theta \, \hat{y} \\
&= -m \cdot B \sin\theta \, \hat{y} \\
&= \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}
\end{aligned}
$$

Skiftet av fortegn i siste linje skyldes av vi hadde valgt positiv vinkel θ mellom z-aksen og $\hat{n}$, altså mellom $\boldsymbol{B}$ og $\boldsymbol{m}$. Kryssproduktet $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$ er, pr definisjon, m ganger B ganger sinus til vinkelen mellom $\boldsymbol{m}$ og $\boldsymbol{B}$, dvs $mB\sin(-\theta) = -mB\sin\theta$.

c) I øving 9 hadde vi en *generell* sammenheng mellom dreiemoment τ og tilhørende potensiell energi U, nemlig at en rotasjon gjennom en vinkel $d\alpha$ under påvirkning av et dreiemoment τ resulterer i en endring dU i potensiell energi gitt ved

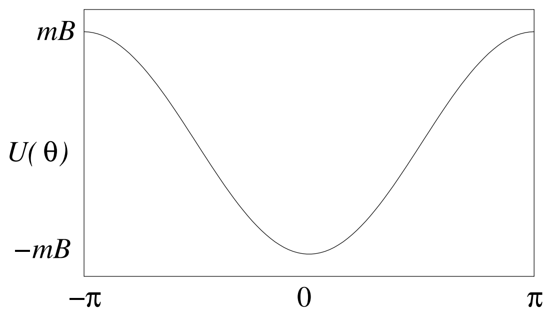
$$dU = -\tau \, d\alpha$$

Denne sammenhengen er ikke avhengig av hvilken *type* krefter og dreiemoment det handler om, og må derfor gjelde like bra for vår magnetiske dipol i et magnetfelt som for den elektriske dipolen i et elektrisk felt i øving 9. Følgelig:

$$
\begin{aligned}
U(\theta) &= \int_{\theta_0}^{\theta} dU \\
&= -\int_{\theta_0}^{\theta} \tau(\alpha) \, d\alpha \\
&= mB \int_{\theta_0}^{\theta} \sin\alpha \, d\alpha \\
&= mB \left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right) \\
&= -mB\cos\theta \\
&= -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}
\end{aligned}
$$

Her valgte jeg å sette $U(0) = -mB$, dvs $\theta_0 = \pi/2$.

Skisse:



Vi har minimal U, og følgelig stabil likevekt for $\theta = 0$, dvs for dipolen orientert slik at $\boldsymbol{m}$ er parallell med $\boldsymbol{B}$. Vi har maksimal U, og følgelig ustabil likevekt for $\theta = \pm\pi$, dvs for dipolen orientert slik at $\boldsymbol{m}$ er parallell med $-\boldsymbol{B}$.

Dette er magnetismens analogi til polarisering av dielektriske medier i et ytre elektrisk felt: Magnetiske dipoler retter seg inn langs det påtrykte magnetfeltet. Som nevnt lenger opp, dette er hva vi kaller *paramagnetisme*. Vi har snakket om ulike typer magnetisme i forelesningene – her er en liten oppsummering:

Medier som består av atomer/molekyler som har et permanent atomært magnetisk dipolmoment som *ikke* er lik null, og der dipolmomentene på atomer i nærheten av hverandre *ikke* vekselvirker med hverandre, er *paramagneter*. *Uten* et ytre magnetfelt vil de atomære magnetiske dipolmomentene peke i tilfeldige retninger, slik at den midlere *magnetiseringen*, dvs midlere magnetiske dipolmoment pr volumenhet, blir lik null overalt i mediet. Slik var det også med midlere polarisering i et dielektrikum når vi ikke hadde noe ytre elektrisk

felt. *Med* et ytre magnetfelt får vi en tendens til innretting av magnetiske dipolmoment langs det ytre feltet, og dermed en midlere magnetisering forskjellig fra null. Eksempler på paramagnetiske materialer er aluminium (Al) og magnesium (Mg). Paramagnetisme er en svak effekt, med magnetisk susceptibilitet av størrelsesorden 10^{-4} eller deromkring.
Medier som består av atomer med atomært magnetisk dipolmoment *lik null* har ingenting å rette inn i et påtrykt magnetfelt. Men, og som nevnt lenger opp, *banebevegelsen* til elektronene rundt atomkjernen vil påvirkes av et ytre magnetfelt, slik at vi får *indusert* et atomært magnetisk dipolmoment i hvert eneste atom. Slike medier er *diamagneter*. Vi ser kvalitativt på denne effekten i neste oppgave, og vil finne at det induserte magnetiske dipolmomentet blir *motsatt rettet det ytre feltet*. Diamagnetisme er en mye svakere effekt enn paramagnetisme, med magnetisk susceptibilitet av størrelsesorden -10^{-5}. Også i paramagneter, der vi *har* permanente atomære magnetiske dipolmoment, får vi en slik diamagnetisk "respons" i et ytre magnetfelt. Den diamagnetiske responsen vil imidlertid overskygges av den paramagnetiske effekten i en paramagnet. For å kunne måle diamagnetisme, trenger vi derfor medier med null atomært magnetisk dipolmoment i utgangspunktet (dvs før vi skrur på det ytre magnetfeltet). Eksempler på diamagneter er gull (Au), sølv (Ag), kobber (Cu).
I enkelte medier har vi atomer med magnetiske dipolmoment som *vekselvirker* med dipolmomentene på naboatomene. F.eks. kan vekselvirkningen være slik at det er energetisk foretrukket at naboatomer har sine magnetiske dipolmoment i samme retning. Da har vi en *ferromagnet*, og eksempler på ferromagneter er jern (Fe), kobolt (Co) og nikkel (Ni). Ferromagnetisme er en *mye* sterkere effekt enn paramagnetisme, med magnetisk susceptibilitet av størrelsesorden 10^3 til 10^4. Alternativt kan vekselvirkningen være slik at det er energetisk foretrukket at naboatomer har sine magnetiske dipolmoment i motsatt retning. Da har vi en *antiferromagnet*. Eksempler på antiferromagneter er Cr (krom) og NiO (nikkeloksyd). Ved tilstrekkelig høy temperatur blir den ordnede strukturen av magnetiske dipoler ødelagt av "termiske bevegelser", og ferromagneten/antiferromagneten blir en paramagnet.

Oppgave 2

a) Sentripetalakselerasjonen er v_0^2/R mens Coulombkraften er $e^2/4\pi\varepsilon_0 R^2$. Newtons 2. lov gir da

$$m_e \frac{v_0^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e v_0^2}$$

Atomets magnetiske dipolmoment blir dermed

$$\boldsymbol{m}_0 = I\boldsymbol{A} = -\frac{e}{2\pi R/v_0} \cdot \pi R^2 \, \hat{z} = -\frac{1}{2} e v_0 R \, \hat{z}.$$

b) Den valgte retningen på $\boldsymbol{B}$ fører til at den magnetiske kraften $\boldsymbol{F}_m = -e\, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ blir rettet innover mot kjernen, dvs i samme retning som den tiltrekkende Coulombkraften. Med uendret baneradius R bestemmes dermed hastigheten v av ligningen

$$m_e \frac{v^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + evB.$$

Dette er en annengradsligning for v,

$$v^2 - \frac{eBR}{m_e}\, v - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R} = 0,$$

med løsning

$$v = \frac{eBR}{2m_e} + \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R} + \left(\frac{eBR}{2m_e}\right)^2}$$

(Løsningen med negativt fortegn foran kvadratroten er negativ og ikke aktuell.)
La oss gå tilbake og se på hastigheten uten magnetfelt:

$$v_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R}}$$

Vi ser umiddelbart at $v > v_0$. Det betyr at det magnetiske dipolmomentet

$$\boldsymbol{m} = -\frac{1}{2} evR\,\hat{z}$$

er større enn før vi skrudde på magnetfeltet. Med andre ord, *endringen*

$$\Delta\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_0$$

er motsatt rettet det ytre magnetfeltet.
Hvis magnetfeltet i stedet var rettet nedover, $\boldsymbol{B} = -B\,\hat{z}$, ville den magnetiske kraften bli rettet radielt *utover*, dvs i motsatt retning av Coulombkraften, slik at tilleggsleddet evB i bevegelsesligningen ville komme inn med motsatt fortegn. Dermed ville den nye hastigheten v ha blitt mindre enn v_0, og det magnetiske dipolmomentet også mindre enn før vi skrudde på magnetfeltet. Igjen: *Endringen* i magnetisk dipolmoment ville fremdeles ha vært motsatt rettet det ytre feltet.
Konklusjon: Et ytre magnetfelt påvirker elektronets banebevegelse i atomet på en slik måte at det *induserte* magnetiske dipolmomentet, dvs det magnetiske dipolmomentet knyttet til endringen i banebevegelsen, blir motsatt rettet det påtrykte feltet. Altså *diamagnetisme*.

Oppgave 3

a) **B**. N viklinger omslutter en magnetisk fluks, som er proporsjonal med N, dvs i alt en total omsluttet magnetisk fluks proporsjonal med N^2.

b) **B**. Magnetisk energitetthet er $B^2/2\mu_0$, og magnetfeltet kan regnes som omtrent konstant og lik $\mu_0 nI$ i hele volumet $A \cdot l$. Her er A spolens tverrsnitt, l den lengde, og $n = N/l$ dens viklingstetthet. Innsetting av oppgitte tallverdier gir, med $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, ca 3.6 mJ. Siden det faktiske magnetfeltet nok er noe svakere ut mot spolens ender, sier vi ca 3 mJ.

c) **D**. Kirchhoffs spenningsregel ("K2") gir

$$V_0 \cos\omega t = Q/C,$$

slik at

$$I = dQ/dt = -V_0\omega C \sin\omega t.$$

Strømmen har derfor amplitude $V_0\omega C$. Strømamplituden øker altså lineært med frekvensen til den påtrykte spenningen. Likespenning, $\omega = 0$, gir null strøm, som forventet – ingen strøm gjennom en ideell kondensator.

d) **B**. K2 gir

$$V_0 \cos\omega t = L dI/dt,$$

dvs

$$I = (V_0/\omega L) \sin\omega t.$$

Strømmen har derfor amplitude $V_0/\omega L$. Strømamplituden avtar altså med frekvensen til den påtrykte spenningen. Likespenning, $\omega = 0$, gir uendelig strøm, som forventet – en induktans er ganske enkelt en kortslutning dersom strømmen gjennom den ikke endrer seg.

e) **B**. Ohms lov.

f) **B**. Noen navn må vi kjenne til!