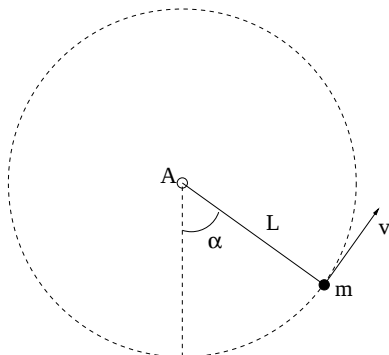


Oppgave 1: Matematisk pendel



Figuren til venstre viser en såkalt matematisk pendel, bestående av ei kule (tilnærmet punktmasse) med masse m i enden av ei masseløs stang med lengde L . Stanga kan svinge uten friksjon omkring festepunktet (A), slik at kula følger en sirkelbane med radius L . Kulas bevegelse er bestemt ved ligningen

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \alpha = 0.$$

(N2 tangentielt til sirkelbanen, og vi har brukt sammenhengen mellom hastighet og vinkelhastighet ved sirkelbevegelse. Se også oppgave 4 i øving 2.)

For små utsving fra likevekt, $\alpha \ll 1$, kan $\sin \alpha$ erstattes med α , og vi har en enkel harmonisk oscillator, med kjent løsning, og med vinkelfrekvens ("egenfrekvens") $\omega_0 = \sqrt{g/L}$. Men for større utsving fra likevekt må vi beholde $\sin \alpha$, og da kan ligningen ovenfor ikke løses analytisk. Numerisk er det imidlertid ingen problemer! Den enkleste og mest intuitive numeriske måten å bestemme $\alpha(t)$ på er den såkalte Euler-metoden: N2 kan skrives på formen

$$dv = \frac{F}{m} dt.$$

Det betyr at hastigheten ved tidspunktet $t+dt$ kan bestemmes dersom vi kjenner hastigheten ved tidspunktet t :

$$v(t+dt) = v(t) + dv = v(t) + \frac{F}{m} dt.$$

Med et *endelig* tidssteg Δt blir ligningen

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \Delta v = v(t) + \frac{F(t)}{m} \Delta t$$

bare tilnærmet riktig, men formodentlig en riktig *god* tilnærmelse dersom Δt velges tilstrekkelig liten.

Samme oppskrift kan vi i neste omgang bruke for å bestemme posisjonen, eller som her, vinkelen $\alpha(t)$. Vi har $v = ds/dt = L d\alpha/dt$, dvs

$$d\alpha = \frac{v}{L} dt,$$

og med endelig tidssteg gir dette

$$\alpha(t+\Delta t) = \alpha(t) + \Delta\alpha = \alpha(t) + \frac{v(t)}{L} \Delta t.$$

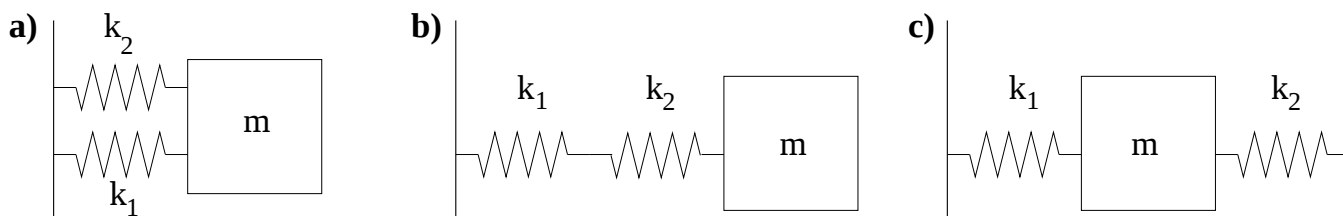
Hvis vi nå, som her, kjenner $\alpha(t=0)$ og $v(t=0)$, dvs $\alpha(0) = \alpha_0$ og $v(0) = v_0$, kan ligningene over brukes til å finne $\alpha(\Delta t)$ og $v(\Delta t)$, deretter $\alpha(2\Delta t)$ og $v(2\Delta t)$ osv. I vårt konkrete tilfelle er det tyngdens tangentialkomponent som bestemmer akselerasjonen, og dermed hastigheten tangentielt,

$$\frac{F}{m} = -g \sin \alpha.$$

I MATLAB-programmet `pendel_matematisk.m` er denne oppskriften implementert. (Det beste er selvsagt at du skriver et MATLAB-program selv, men du skal ikke ha dårlig samvittighet om du laster ned det ferdige programmet og tar dette i bruk. Dårlig samvittighet skal du derimot ha hvis du ikke gjør denne oppgaven i det hele tatt!) **Kjør programmet** med startvinkel $\alpha_0 = 0$, men med diverse ulike verdier av starthastigheten v_0 (dvs $v(1)$ i programmet), les av tilhørende maksimalt vinkelutslag, og plott svingeperioden T som funksjon av $\alpha_{\max}$. **Vis at** mekanisk energi (pr masseenheter), $E/m = (K + U)/m$, er bevart, ved å regne den ut og plotte den som funksjon av t i programmet.

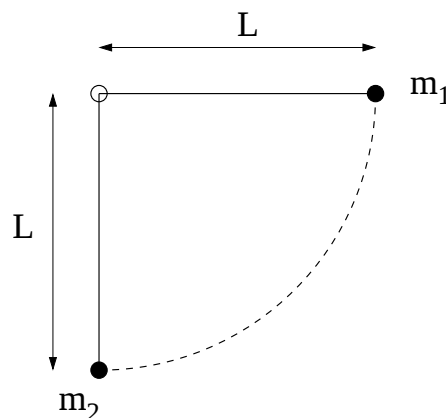
Oppgave 2: Kobling av fjærer

Et enkelt masse-fjær-svingesystem med masse m og fjærstivhet k_i har som kjent svingefrekvens $\omega_i = \sqrt{k_i/m}$. Sett opp "N2" for de tre svingesystemene vist i figuren nedenfor og finn svingefrekvensen ω for hvert av systemene uttrykt ved ω_1 og ω_2 . I alle tilfellene er fjærene masseløse, og det er ingen friksjon.



Oppgave 3: Kulekollisjoner

To kuler med masse m_1 og m_2 er hengt opp i samme punkt med tynne, vektløse snorer med lengde L . Kula med masse m_1 trekkes ut til snora er horisontal og slippes. Den svinger nedover og treffer kula med masse m_2 i et sentralt støt. Betrakt kulene som punktmasser slik at snorene er vertikale når kollisjonen skjer.



- Hva er hastigheten v_1 til kula med masse m_1 og strekket S_1 i snora som masse m_1 henger i, like før støtet?
- Anta at kulene er klebrige og kollisjonen fullstendig uelastisk. Hvor høyt kommer kulene etter kollisjonen?
- Finn forholdet mellom mekanisk energi etter og før denne fullstendig uelastiske kollisjonen.

Anta heretter at kollisjonen er elastisk.

- Finn uttrykk for hastighetene til kule 1 og kule 2 like etter kollisjonen.
- Hva må masseforholdet m_1/m_2 minst være for at kule 2 etter støtet skal svinge helt rundt, dvs nå topp-punktet med stram snor?

Oppgave 4: Flervalgsoppgaver

a) En kloss er festet til ei fjær og utfører udempede harmoniske svingninger med vinkelfrekvens ω . Ved et bestemt tidspunkt er fjæra strukket en lengde x_0 og klossens hastighet er da v_0 . Hva er klossens maksimale hastighet?

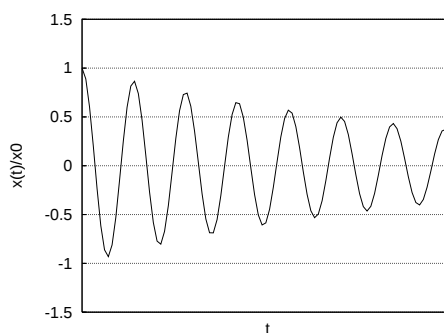
- A v_0
- B $v_0 + \omega x_0$
- C $v_0 \sqrt{1 + (\omega x_0 / v_0)^2}$
- D $v_0 \sqrt{1 - (\omega x_0 / v_0)^2}$

b) Figuren viser utsvinget

$$x(t) = x_0 e^{-t/\tau} \cos \omega t,$$

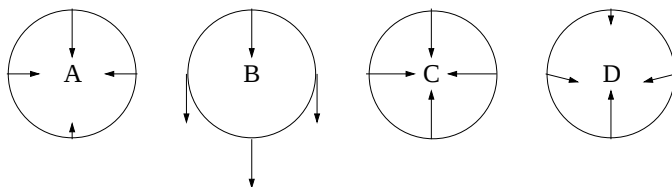
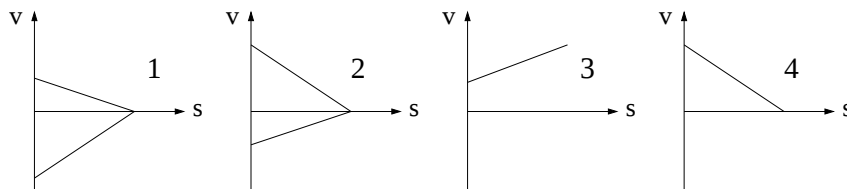
eller rettere sagt $x(t)/x_0$, for en dempet harmonisk svingning. Omtrent hvor stort er produktet $\omega\tau$ mellom vinkelfrekvensen og den "karakteristiske tiden" for dempingsforløpet?

- A 0.022
- B 1.7
- C 14
- D 45

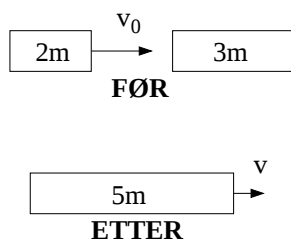


c) En kloss sendes oppover et skråplan. Det er friksjon mellom klossen og underlaget. Hvilken eller hvilke av figurene viser mulig graf for klossens hastighet v ? (s angir klossens posisjon på skråplanet, og v og s er begge positive i retning oppover skråplanet.)

- A Kun graf 1.
- B Kun graf 2.
- C Graf 2 og 4.
- D Graf 1 og 3.



d) Ei vogn har stor nok hastighet til å fullføre en vertikaltstilt sirkelformet "loop". Hvilken figur viser riktige akselerasjonsvektorer på de fire stedene på loopen (nederst, øverst, venstre og høyre)? (Se bort fra friksjon.)



e) En kloss med masse $2m$ kolliderer fullstendig uelastisk med en kloss med masse $3m$. Før kollisjonen har klossen med masse $2m$ hastighet v_0 mens klossen med masse $3m$ ligger i ro. Etter kollisjonen har klossene felles hastighet v . Hvor mye mekanisk energi har gått tapt i kollisjonen?

- A $mv_0^2/3$
- B $2mv_0^2/5$
- C $3mv_0^2/5$
- D mv_0^2