

TFY4104 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2013.
Løsningsforslag til øving 5.

Oppgave 1.

a) Rakettligningen:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg + u \frac{dm}{dt}.$$

Vi ganger ligningen med dt/m og integrerer, fra 0 til v for v , fra 0 til t for t , og fra m_0 til m for m :

$$\int_0^v dv = -g \int_0^t dt + u \int_{m_0}^m \frac{dm}{m},$$

som gir

$$v(t) = -gt + u \ln \frac{m}{m_0} = -u \ln \frac{m_0}{m} - gt.$$

b) Må ha skyvkraft minst like stor som tyngdekraften $m_0 g = 2.98 \cdot 10^7$ N. Her er skyvkraften lik $u\beta = 3.40 \cdot 10^7$ N, så raketten *vil* lette fra bakken. Drivstoffmassen ved avreise er $m_d = -\beta t_f = 1.98 \cdot 10^6$ kg. Raketten uten drivstoff har masse $m_f = m_0 - m_d = 1.06 \cdot 10^6$ kg.

c) Fra rakettligningen har vi umiddelbart

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -g + \frac{u}{m} \frac{dm}{dt} = \frac{u\beta}{m} - g.$$

Med konstant drivstoff-forbruk har vi $m = m_0 + \beta t$, og dermed $a(t)$ som oppgitt. Ved $t = 0$: $a(0) = u\beta/m_0 - g = 1.39$ m/s². Ved $t = t_f$: $a(t_f) = u\beta/m_f - g = 22.3$ m/s².

d) Vi kan skrive

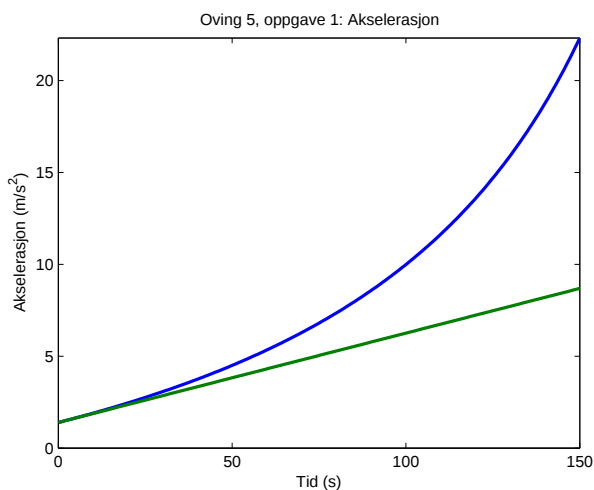
$$a(t) = \frac{u\beta}{m_0} \frac{1}{1 + \beta t/m_0} - g.$$

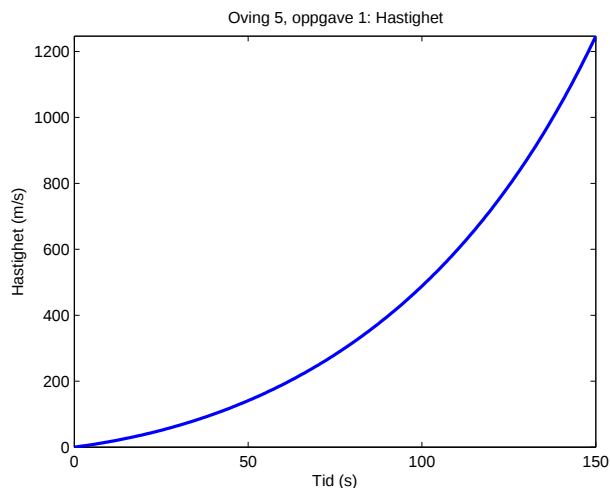
Hvis $t \ll m_0/(-\beta)$, så er $x = -\beta t/m_0 \ll 1$. Dermed er

$$a(t) \simeq a_{\text{lin}}(t) = \frac{u\beta}{m_0} \left(1 - \frac{\beta t}{m_0}\right) - g = a(0) - \frac{u\beta^2}{m_0^2} t,$$

som oppgitt.

Figurer produsert med Matlab-programmet rakettlosning.m for hhv akselerasjon og hastighet som funksjon av t :





På øyemål anslår vi at den lineære tilnærmelsen til $a(t)$ er god omtrentlig de første 20 sekundene.

e) Tilbakelagt distanse er gitt ved

$$h(t) = \int_0^t v(t) dt.$$

Vi har at

$$\int \ln x dx = x \ln x - x,$$

siden den deriverte av høyre side her gir tilbake $\ln x$. Litt fundering på hvordan riktige konstanter skal velges her og der gir da

$$h(t) = u \frac{m_0 + \beta t}{\beta} \ln \frac{m_0 + \beta t}{m_0} - ut - \frac{1}{2}gt^2,$$

og setter vi inn $t = t_f = 150$ s her, finner vi at $h(t_f) = 58353$ m $\simeq$ 58.4 km.

Forholdet mellom $g(0)$, dvs g ved jordoverflaten, og $g(h)$, dvs g i høyden h over bakken, er

$$\frac{g(0)}{g(h)} = \left(\frac{R+h}{R} \right)^2.$$

Setter vi inn $R = 6.37 \cdot 10^3$ km og $h = h_f = 58.4$ km, finner vi at dette forholdet blir ca 1.02. Med andre ord, vi gjør ikke større feil enn et par prosent ved å bruke samme verdi 9.81 m/s² for g for hele distansen.

Oppgave 2

a) Energibevarelse gir $Mgh = Mv_0^2/2$ og $v_0 = \sqrt{2gh}$. Ballen "reflekteres" fra bakken med hastighet $-v_0 = -\sqrt{2gh}$. (Her er det **valgt positiv hastighetsretning nedover**.) Ballens impulsending i kollisjonen med bakken er $\Delta p = M\Delta v = -2Mv_0$. Impulsbevarelse, totalt sett, er ivaretatt i og med at bakken endrer sin impuls med beløpet $2Mv_0$.

b) Rett før den elastiske kollisjonen mellom de to ballene har nederste ball hastighet $-v_0$ og øverste ball hastighet v_0 . (De har falt like langt.) Det er gitt i oppgaven at v angir hastigheten til øverste ball etter kollisjonen. La oss dessuten med v_1 angi nederste balls hastighet etter kollisjonen. Bevaring av energi og impuls gir da (med $M = \alpha m$)

$$mv_0 - \alpha mv_0 = mv + \alpha mv_1 \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\alpha mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\alpha mv_1^2 \tag{2}$$

Vi benytter "trikset" som ble antydnet på forelesning: Vi dividerer (1) med m og (2) med $m/2$. Deretter samler vi ledd som inneholder α på den ene siden av likhetstegnet:

$$v_0 - v = \alpha(v_1 + v_0) \quad (3)$$

$$v_0^2 - v^2 = \alpha(v_1^2 - v_0^2) \quad (4)$$

Under forutsetning av at begge sider i (3) er forskjellig fra null, kan vi dividere (4) med (3). Det gir

$$v_0 + v = v_1 - v_0 \Rightarrow v_1 = 2v_0 + v,$$

som innsatt i ligning (3) lar oss eliminere v_1 :

$$v_0 - v = \alpha(2v_0 + v + v_0) = 3\alpha v_0 + \alpha v \quad (5)$$

$$\Rightarrow (\alpha + 1)v = (1 - 3\alpha)v_0 \quad (6)$$

$$\Rightarrow v = \frac{1 - 3\alpha}{\alpha + 1} v_0 = \sqrt{2gh} \cdot \frac{1 - 3\alpha}{\alpha + 1} \quad (7)$$

$$(\Rightarrow v_1 = 2v_0 + v = v_0 \frac{3 - \alpha}{\alpha + 1} = \sqrt{2gh} \cdot \frac{3 - \alpha}{\alpha + 1}) \quad (8)$$

Med "starthastighet" v i $y = 0$ vil den øverste ballen sprette til en høyde $y = v^2/2g$, dvs

$$y = h \cdot \left(\frac{3\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)^2.$$

Grense- og spesialtilfeller:

- $\alpha \gg 1$: Da vil $v \rightarrow -3v_0$ og $y \rightarrow 9h$. Høyere enn dette er det altså ikke mulig å få en ball til å sprette ved å slippe den sammen med *en* tyngre ball, fra høyden h . Med *flere* baller, derimot, med gradvis økende masse nedover, er det mulig å få den øverste ballen til å sprette riktig høyt (se A. Anderson og J. Vanderkooy, *Physics Education* **34**, side 172 (1999), evt Essay kap. 5 hvis du har boka LL).
- $\alpha = 1$: Da vil $v \rightarrow -v_0$ og $y \rightarrow h$. Og det er jo rimelig: De to ballene har lik masse og spretter begge etter hvert tilbake til sine opprinnelige starthøyder. Den nederste ballen vil selvsagt først ta seg en ekstra runde nedom bakken, med hastighet $v_1 = v_0$, for å overføre en ny porsjon impuls, $2Mv_0 = 2mv_0$, til gulvet, før den endelig spretter tilbake til opprinnelig høyde.

Oppgave 3

a) Massen til del av bøylen innenfor vinklelementet $d\theta$ er

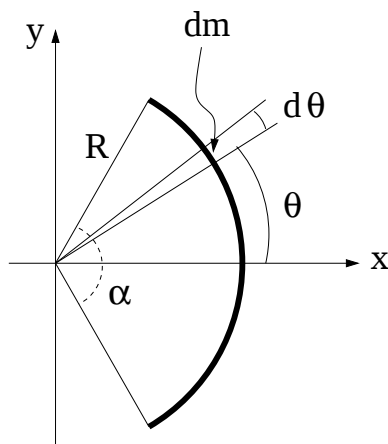
$$dm = \lambda dl = \lambda R d\theta,$$

der $\lambda = M/2\alpha R$ er bøylen masse pr lengdeenhet (kg/m). Men i slike oppgaver kan det være like greit å ikke innføre massetettheter, idet vi kan uttrykke massen i vinklelementet $d\theta$ som

$$dm = (\text{total masse}) \cdot (dm \text{ sin andel av hele massen}) = M \cdot \frac{d\theta}{2\alpha}.$$

Med denne dm og bruk av $x = R \cos \theta$ blir tyngdepunktets x -verdi

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{M} \int_{\text{legeme}} x dm = \frac{1}{M} \cdot R \cdot \frac{M}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{R}{2\alpha} [\sin \alpha - \sin(-\alpha)] = \underline{\underline{R \frac{\sin \alpha}{\alpha}}}. \end{aligned}$$



Tyngdepunktets y -verdi er $Y = 0$, av symmetrigrunner.

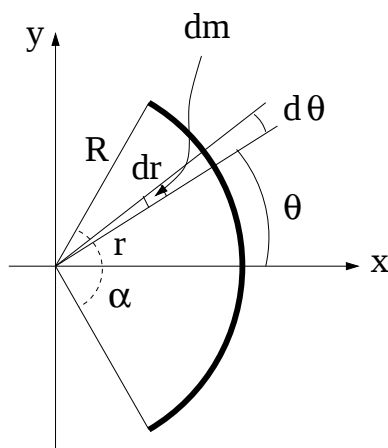
$\alpha = \pi$ gir $X = 0$, som ventet for en hel sirkel.

$\alpha \rightarrow 0$ gir $(\sin \alpha)/\alpha \rightarrow 1$ og $X = R$, som ventet for en liten masse samlet i $x = R$.

b) Massen til en infinitesimal del av sektoren innenfor vinklelementet $d\theta$ og radius dr er

$$dm = (\text{total masse}) \cdot (dm \text{ sin andel av hele massen}) = M \cdot \frac{dA}{A} = M \cdot \frac{r d\theta \cdot dr}{\frac{2\alpha}{2\pi} \pi R^2} = M \cdot \frac{r d\theta \cdot dr}{\alpha R^2}.$$

Med denne dm og bruk av $x = r \cos \theta$ blir tyngdepunktets x -verdi



$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{M} \int_{\text{sektor}} x \, dm = \frac{1}{M} \cdot \frac{M}{\alpha R^2} \int_{\theta=-\alpha}^{\alpha} \int_{r=0}^R r^2 \cos \theta \, d\theta dr \\ &= \frac{1}{\alpha R^2} \int_{\theta=-\alpha}^{\alpha} \cos \theta \, d\theta \int_{r=0}^R r^2 dr \\ &= \frac{1}{\alpha R^2} [\sin \theta]_{-\alpha}^{\alpha} \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^R \\ &= \underline{\underline{\frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}}}. \end{aligned}$$

Tyngdepunktets y -verdi er $Y = 0$, av symmetrigrunner.

Alternativt kan du bruke resultatet fra a) ved å betrakte sirkelsektoren som en sum av bøyler med radius fra 0 til R . En bøyler med radius r har da $X = r (\sin \alpha)/\alpha$ og masse (sammenlign med det som er gjort ovenfor)

$$dm = M \cdot \frac{dA_{\text{bøyler}}}{A} = M \cdot \frac{r \cdot 2\alpha \cdot dr}{\frac{2\alpha}{2\pi} \pi R^2} = M \cdot \frac{2r \cdot dr}{R^2},$$

og vi får

$$X = \frac{1}{M} \int_{\text{alle bøyler}} X \, dm = \frac{1}{M} \int_0^R r \frac{\sin \alpha}{\alpha} M \frac{2r \cdot dr}{R^2} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{2}{R^2} \int_0^R r^2 dr = \underline{\underline{\frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}}}.$$

$\alpha = \pi$ gir $X = 0$, som ventet for en hel sirkel.

$\alpha \rightarrow 0$ gir $(\sin \alpha)/\alpha \rightarrow 1$ og $X = 2R/3$, som vel er rimelig for en meget smal sirkelsektor.