TFY4104 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2013.
Løsningsforslag til øving 6.

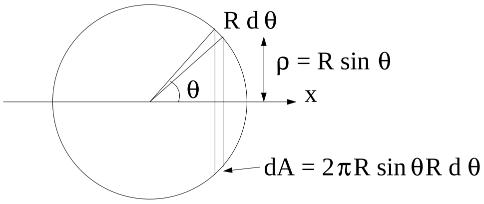
Oppgave 1.

a) For ei tynn stang bruker vi $dm = m \cdot dx/R$. Da blir treghetsmomentet til ei tynn stang om en akse normalt på stanga gjennom stangas ende:

$$I_s = \int_{\text{stanga}} x^2\, dm = \frac{m}{R} \int_0^R x^2\, dx = \frac{m}{R} \cdot \frac{1}{3} R^3 = \frac{1}{3} mR^2.$$

Treghetsmomentet til felgen er MR^2. Treghetsmomentet til hele kjerrehjulet er derfor

$$I_0 = MR^2 + N \cdot \frac{mR^2}{3} = \left(M + \frac{N}{3}\, m\right) R^2.$$



b) Vi setter $dm = M \cdot dA/A$, med $A = 4\pi R^2$ = arealet av hele kuleskallet og $dA = 2\pi\rho \cdot Rd\theta = 2\pi R \sin\theta \cdot Rd\theta$ = arealet av en smal ring med omkrets $2\pi R \sin\theta$ og bredde $Rd\theta$. Her er θ vinkelen mellom (rotasjons-)aksen og linjen fra kuleskallets sentrum ut til den smale ringen, se figur. Dermed:

$$I_0 = \int_0^\pi (R \sin\theta)^2 \cdot M \cdot \frac{2\pi R^2 \sin\theta d\theta}{4\pi R^2} = \frac{1}{2} MR^2 \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta.$$

Vi bruker tipset gitt i oppgaven og finner

$$\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{4}\left(3\sin\theta - \sin 3\theta\right) = |_0^\pi \left(\frac{\cos 3\theta}{12} - \frac{3\cos\theta}{4}\right) = \frac{4}{3},$$

slik at

$$I_0 = \frac{2}{3} MR^2.$$

c) Vi betrakter ei kompakt kule som mange tynne kuleskall utenpå hverandre, hver med treghetsmoment $dI = 2r^2 dm/3$, radius r, masse $dm = M \cdot dV/V$, der $V = 4\pi R^3/3$ er kulas totale volum, og $dV = 4\pi r^2 dr$ er volumet til et kuleskall med radius r og tykkelse dr. Dermed:

$$I_0 = \int dI = \int_0^R \frac{2}{3} r^2 \cdot M \cdot \frac{4\pi r^2 dr}{4\pi R^3/3} = \frac{2M}{R^3} \int_0^R r^4 dr = \frac{2}{5} MR^2.$$

[Alternativ metode: La x-aksen være rotasjonsaksen og del opp kula i tynne skiver med tykkelse dx og radius $\sqrt{R^2 - x^2}$, og dermed volum $dV = dx \cdot \pi(R^2 - x^2)$ og masse $dm = MdV/V = M \cdot dx \cdot \pi(R^2 - x^2)/(4\pi R^3/3)$. Treghetsmomentet til ei slik skive er $dI = dm \cdot (R^2 - x^2)/2$, slik at kulas treghetsmoment blir

$$\begin{aligned}
I &= \int dI \\
&= \frac{1}{2} \int dm \cdot (R^2 - x^2) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^R \frac{M \cdot dx \cdot \pi(R^2 - x^2)}{4\pi R^3/3} \cdot (R^2 - x^2) \\
&= \frac{3M}{4R^3} \int_0^R (R^4 - 2R^2x^2 + x^4) dx \\
&= \frac{2}{5} MR^2.]
\end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Jojoens volum er

$$V = 2b \cdot \pi R^2 + a \cdot \pi r^2,$$

og dens masse pr volumenhet er $\mu = M/V$. Jojoens treghetsmoment er dermed

$$\begin{aligned} I_0 &= 2 \cdot \frac{1}{2}\mu \cdot b\pi R^2 \cdot R^2 + \frac{1}{2}\mu \cdot a\pi r^2 \cdot r^2 \\ &= \frac{M(b\pi R^4 + a\pi r^4/2)}{2b\pi R^2 + a\pi r^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{MaR^4(2b/a + r^4/R^4)}{aR^2(2b/a + r^2/R^2)} \\ &= \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{2\alpha + \beta^4}{2\alpha + \beta^2}. \end{aligned}$$

Spesialtilfeller:

- $\beta = 1$: Da er $c = 1$ og $I_0 = MR^2/2$ som det skal være for en kompakt sylinder med masse M og radius R.
- $a = 0$: Da vil $\alpha \to \infty$ og igjen er $c = 1$ og $I_0 = MR^2/2$. OK, fortsatt kompakt sylinder med masse M og radius R.
- $b = 0$: Da er $\alpha = 0$, og $c = \beta^2 = r^2/R^2$, slik at $I_0 = Mr^2/2$. OK: Denne gang har vi kompakt sylinder med radius r og masse M.

b) N2 for vertikal translasjon:

$$Mg - S = MA.$$

N2 for rotasjon om jojoens symmetriakse:

$$Sr = I_0\dot{\omega} = I_0 A/r.$$

Siste ligning gir

$$S = I_0 A/r^2,$$

som innsatt i første ligning gir

$$\begin{aligned} Mg - I_0 A/r^2 &= MA \\ A(M + I_0/r^2) &= Mg \\ A &= \frac{g}{1 + I_0/Mr^2} \end{aligned}$$

for jojoens akselerasjon. Innsetting av dette uttrykket for A gir for snordraget,

$$S = I_0 A/r^2 = \frac{Mg}{1 + Mr^2/I_0},$$

uten at vi vel var bedt spesifikt om å regne ut dette. Tallverdi for koeffisienten c med oppgitte dimensjoner:

$$c = \frac{2\alpha + \beta^4}{2\alpha + \beta^2} = \frac{2 + 1/8^4}{2 + 1/8^2} \simeq 1.$$

Videre er

$$\frac{I_0}{Mr^2} \simeq \frac{R^2}{2r^2} = \frac{1}{2\beta^2} = 32,$$

slik at

$$A \simeq g/33 \simeq 0.30\,\text{m/s}^2.$$

Det betyr at jojoen bruker ca 2.6 s på å falle 1 m, dersom den starter med null hastighet. ($h = At^2/2$)

Oppgave 3

a) Mhp aksen gjennom A (normalt papirplanet) har staven et treghetsmoment $ML^2/3$ (se oppgave 1). En ekstra masse m i avstand l gir ganske enkelt et ekstra bidrag ml^2, slik at

$$I = \frac{1}{3}ML^2 + ml^2.$$

b) Før sammenstøtet mellom kule og stav er det bare kula som har impuls, slik at

$$\boldsymbol{p}_i = mv\hat{x}.$$

c) Før sammenstøtet er det bare kula som har dreieimpuls om A, dens *banedreieimpuls* om A er

$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_i = -l\hat{y} \times mv\hat{x} = mvl\hat{z}.$$

Med impuls i x-retning bidrar ikke x-komponenten av $\boldsymbol{r}$ til dreieimpulsen.

d) Tyngdekraften som virker på staven og kula i sammenstøtet har ingen arm mhp A. En eventuell kraft fra akslingen i sammenstøtet angriper staven i A og har dermed heller ingen arm mhp A. Da er det ikke noe ytre dreiemoment om A som påvirker systemet, og dreieimpulsen om A er bevart: $\boldsymbol{L}_f = \boldsymbol{L}_i = mvl\hat{z}$.

e) Stav pluss kule er et stivt legeme med treghetsmoment I og dreieimpuls mvl mhp A rett etter sammenstøtet. Da har vi $L = I\omega$, slik at

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{L}}{I} = \frac{v/l}{1 + ML^2/3ml^2}\,\hat{z}.$$

f) Like etter sammenstøtet har alle deler av staven, inklusive den "absorberte" kula, hastighet i positiv x-retning:

$$\boldsymbol{v}(y) = -\omega y\hat{x},$$

slik at $\boldsymbol{v} = 0$ ved A ($y = 0$) og $\boldsymbol{v} = \omega L\hat{x}$ helt nederst ($y = -L$). Gjennomsnittshastigheten for staven blir dermed $\omega L\hat{x}/2$ og dens impuls $M\omega L\hat{x}/2$. Til dette må vi huske å addere kulas impuls $m\omega l\hat{x}$. Følgelig:

$$\boldsymbol{p}_f = \left(\frac{1}{2}ML + ml\right)\omega\hat{x}.$$

Innsetting for ω fra *e*) gir

$$\boldsymbol{p}_f = \frac{mv + MvL/2l}{1 + ML^2/3ml^2}\,\hat{x}.$$

Siden vi skal sammenligne p_f med p_i, trekker vi ut $mv = p_i$ fra telleren og får

$$\boldsymbol{p}_f = \boldsymbol{p}_i\,\frac{1 + ML/2ml}{1 + ML^2/3ml^2}.$$

Her vil forholdet mellom leddene som adderes til 1 i teller og nevner avgjøre om det er p_f eller p_i som er størst:

$$\frac{ML/2ml}{ML^2/3ml^2} = \frac{3l}{2L}.$$

Dermed: Hvis $l > 2L/3$, er $p_f > p_i$. Kula treffer staven så langt ned at rotasjonsbevegelsen ville ha blitt slik at stavens øverste ende rett etter støtet ville ha beveget seg mot venstre. Men staven er festet i A og beveger seg ikke der. Dette må skyldes en kraft $\boldsymbol{F}$ fra akslingen på staven i A rettet mot høyre. Og et ytre kraftstøt $\boldsymbol{F} \cdot \Delta t$ rettet mot høyre vil som kjent gi en økning i systemets impuls i denne retningen. (Her er Δt sammenstøtets (korte) varighet.)
Tilsvarende: Hvis $l < 2L/3$, treffer kula staven så langt opp at øverste ende "prøver" å bevege seg mot høyre. En kraft fra akslingen rettet mot venstre forhindrer dette, og gir samtidig systemet en redusert impuls mot høyre.
Treffer kula nøyaktig i $l = 2L/3$, ønsker stavens øvre ende ikke å bevege seg i sammenstøtet, og vi har faktisk impulsbevarelse.
(I det *videre forløpet* har vi selvsagt ikke impulsbevarelse - og heller ikke dreieimpulsbevarelse - men det var det ikke spørsmål om her.)

g) Kinetisk energi før støtet:

$$K_i = \frac{1}{2}mv^2.$$

Kinetisk energi rett etter støtet:

$$\begin{aligned}
K_f &= \frac{1}{2}m(\omega l)^2 + \frac{1}{2}\int_{\text{staven}} dm(\omega y)^2 \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 + \frac{1}{2}\int_{-L}^{0} \frac{M dy}{L}\omega^2 y^2 \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 + \frac{1}{6}ML^2\omega^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}ml^2 + \frac{1}{6}ML^2\right)\frac{(v/l)^2}{(1+ML^2/3ml^2)^2} \\
&= \ldots \\
&= \frac{K_i}{1+ML^2/3ml^2}.
\end{aligned}$$

Dermed er endringen i kinetisk energi

$$\Delta K = K_f - K_i = -\frac{K_i}{1+3ml^2/ML^2}.$$

Hvis kula har mye større masse enn staven, $m \gg M$, er $\Delta K/K_i \simeq 0$. Det høres rimelig ut: Staven representerer kun en "ubetydelig hindring" for kula, som (rett etter støtet) fortsetter som om intet hadde hendt. Hvis kula derimot har mye mindre masse enn staven, $m \ll M$, blir $\Delta K/K_i \simeq -1 = -100\%$. Det høres også rimelig ut: Staven er så tung i forhold til kula at den henger praktisk talt i ro etter støtet. (Tenk bare på grensen $M \to \infty$; da er staven som en "massiv vegg", all bevegelse opphører, og hele den kinetiske energien er tapt som varme og eventuelt deformasjon av kule og stav.)

Oppgave 4

a) **C**. Bruk Steiners sats, $I_1 = I_2 = I_0 + Md^2$ med $d = R_1 = R_2$.

b) **C**. I luftlinje i nord-syd-retning er det ca 40 mil mellom Oslo og Trondheim, dvs ca $4 \cdot 10^5$ m. Dette blir bilimpulsens "arm" a. Bilen har masse omlag 1000 kg og hastighet østover ca 25 m/s. Dreieimpulsen mhp et sted i Oslo sentrum blir dermed $L = mva \sim 1000 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 10^5 = 10^{10}$ kg m^2/s.

c) **A**. Vi har $\tau = I_0\dot{\omega}$, N2 for rotasjon om akse gjennom slipesteinens tyngdepunkt. Her er $\tau = Sr = 20 \cdot 0.25 = 5.0$ i SI-enheter. Dessuten er $\dot{\omega} = 60/12 = 5.0$, også i SI-enheter. Dermed må I_0 være lik 1.0, i SI-enheten kg m^2.