

Elektrisk potensial

[TM 23; LHL 19.9]
[YF 23.2]

(75)

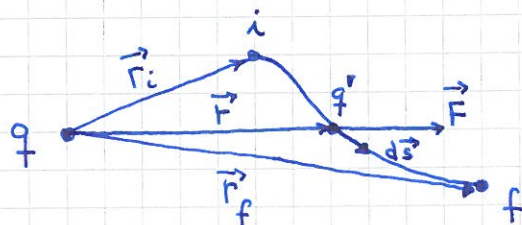
Coulombkraften $\vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$



har samme form som tyngdekraften,

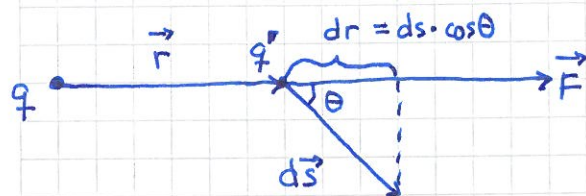
og er dermed konservativ, $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ (se s. 19).

Potensiell energi for q' i det elektriske feltet fra q :



$$\Delta U = U_f - U_i = - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (\text{s. 20})$$

= endring i pot. energi når q'
flyttes fra i til f (q står fast)



$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot ds \cdot \cos\theta = F \cdot dr$$

$$\Rightarrow \Delta U = - \int_{r_i}^{r_f} \frac{qq' dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r_f} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r_i} = U_f - U_i$$

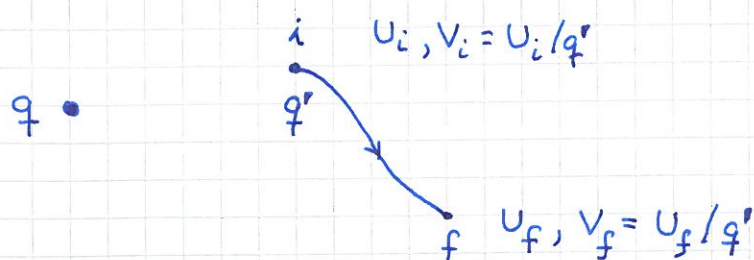
Fra før: $\vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}/q'$

Tilsvarende defineres potensialet V :

$$\boxed{V \stackrel{\text{def}}{=} U/q'}$$

Dvs: elektrisk potensial $V = \text{pot. energi } U \text{ pr ladningsenhet}$

SI-enhet: $[V] = [U/q] = J/C = V \text{ (volt)}$



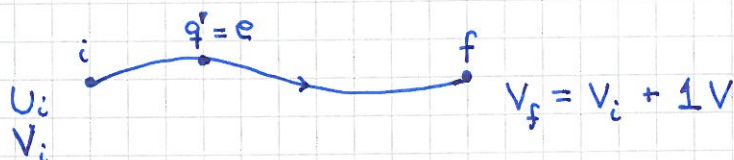
$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{U_f - U_i}{q'} = - \int_i^f \frac{\vec{E} \cdot d\vec{s}}{q'} = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\boxed{\Delta V = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}} = \text{potensialforskjellen mellom } i \text{ og } f$$

$\Rightarrow$ Alternativ enhet for el. felt: $[E] = [\Delta V / \Delta s] = \underline{V/m}$

Energienheten elektronvolt, eV: (Nyttig i fysikk.)

Se på elementarladning som flyttes fra i til f :



Endringen i pot. energi blir:

$$\Delta U = U_f - U_i = V_f \cdot e - V_i \cdot e = 1V \cdot e = \underline{\underline{1eV}}$$

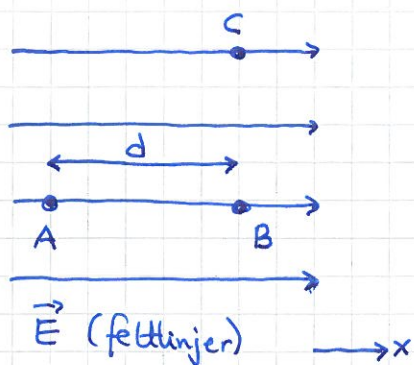
$$1eV = \underbrace{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}_e \cdot \underbrace{1 \text{ J/C}}_{V \text{ (volt)}} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Eks: LHC ved CERN akselererte i 2012 protoner opp til energi $4 \text{ TeV} = 4 \cdot 10^{12} \text{ eV}$, for å produsere Higgs-partikkelen. Protonets hastighet er da $v \approx c - 8 \text{ m/s}$!

[Der $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ = lysets hastighet i vakuum]

Eks: ΔV i uniformt E -felt

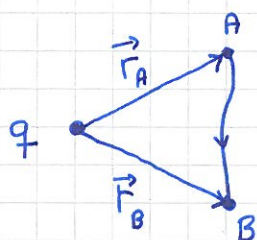
(77)



$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E \int_{x_A}^{x_B} dx = \underline{\underline{-E \cdot d}}$$

$$V_C - V_B = - \int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \underline{\underline{0}} \quad (\text{da } \vec{E} \perp d\vec{s})$$

Eks: $V(r)$ for punktladning [TM 23.2; LHL 19.9] [YF 23.2]



Med q' (som flyttes fra A til B):

$$\Delta U = U_B - U_A = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r_B} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

$$\Rightarrow \Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

(uavhengig av q' , som ventet. Kjekt!)

Velg "referansested" A ∞ langt borte: $r_A \rightarrow \infty \Rightarrow V_A \rightarrow 0$
Og sett $r_B = r$:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Coulombpotensialet: Potensialet i avstand r fra punktladning q

Generalisering til flere punktladninger, evt. kontinuerlig ladn.fordeling:



$$\begin{aligned} \text{Potensial i P: } V_P &= - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{\infty}^P (\sum_i \vec{E}_i) \cdot d\vec{s} = \sum_i \left(- \int_{\infty}^P \vec{E}_i \cdot d\vec{s} \right) \\ &= \sum_i V_P^i = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \end{aligned}$$

Kontinuerlig fordeling: $q_i \rightarrow \Delta q_i \rightarrow dq$; $\sum_i \rightarrow \int$

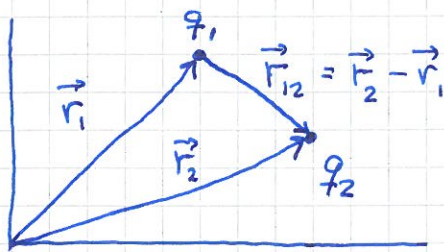
$$\Rightarrow V(r) = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Potensiell energi for ladingssystem

[TM 23.6; LHL 19.9
20.3]

(78)

[YF 23.1]



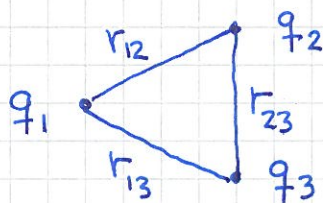
Potensial fra q_1 i $\vec{r}_2$: $V_1(\vec{r}_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$

----- " ----- q_2 i $\vec{r}_1$: $V_2(\vec{r}_1) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$

Pot. energi for ladningsparet : $U_{12} = q_2 V_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$

ert: ----- " ----- : $U_{21} = q_1 V_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} = U_{12}$

Hvis flere ladninger :



Ladningene vekselvirker parvis.

$\Rightarrow$ Total potensiell energi, relativt "referansesystemet" der alle $q_1, q_2, \dots, q_n$ er ∞ langt fra hverandre (og dermed har null pot. energi) :

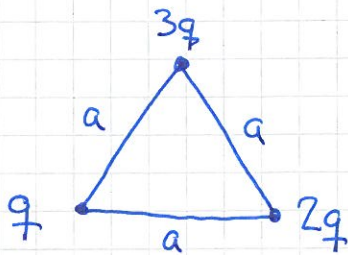
$$U = U_{12} + U_{13} + \dots + U_{1n} + U_{23} + \dots + U_{2n} + \dots + U_{n-1,n}$$
$$= \sum_{i < j} U_{ij} = \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

[Her betyr $\sum_{i < j}$ dobbeltsummen $\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i) \\ (j > i)}}^n$]

U for ladningssystem [TM 23.6; LHL 19.9, 20.3] [YF 23.1] (79)

Fr rest: $U = \sum_{i < j} U_{ij} = \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$

Eks:



$q = e, \quad a = 4 \text{ \AA}$
Finn U i J og eV.

Løsn: $U = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \{1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3\} = \frac{11 q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot 11 \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2 / 4 \cdot 10^{-10} \text{ J} = \underline{\underline{6.3 \cdot 10^{-18} \text{ J}}}$$

$$= \frac{6.3 \cdot 10^{-18} \text{ J}}{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} \approx \underline{\underline{40 \text{ eV}}}$$

Beregning av $\vec{E}$ fra V [TM 23.3; LHL 19.9] [YF 23.5]

$$V = V(\vec{r}) = V(x, y, z)$$

$$\Rightarrow dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

(et såkalt totalt differensial, se Matematikk 2)

Med

$$\nabla V = \hat{x} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} = \text{gradienten til } V$$

$$\text{og } d\vec{s} = \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz = \text{veielementet}$$

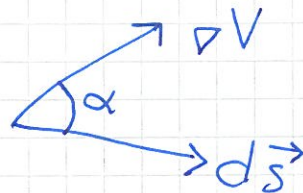
kan vi skrive:

$$\boxed{dV = \nabla V \cdot d\vec{s}}$$

Hva betyr ∇V ?

(80)

$$dV = |\nabla V| \cdot |d\vec{s}| \cdot \cos \alpha$$



$\Rightarrow$ max verdi på dV når forflytningen er i en retning slik at $d\vec{s} \parallel \nabla V$ (dvs $\alpha=0$)

$\Rightarrow \nabla V$ er en vektor som peker i den retningen som V øker raskest.

Og absoluttverdien av ∇V er "hellingen", dvs "stigningstallet", dvs endringen i V pr lengdeenhet

Fra før har vi: $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$

Dermed må vi kunne skrive:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

Dvs: $E_x = -\partial V / \partial x$ etc.

Dermed: $\vec{F} = q' \vec{E} = -q' \nabla V = \underline{\underline{-\nabla U}}$

(siden $V = U/q'$)

Equipotential surfaces [TM 23.5; LHL 19.11] [YF 23.4] (81)

= surfaces with $V = \text{const.}$ (evt. kurver med $V = \text{const.}$)

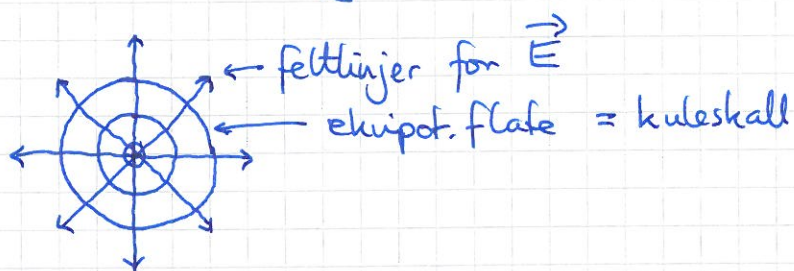
Ders: $dV = 0$

$$\Downarrow$$
$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

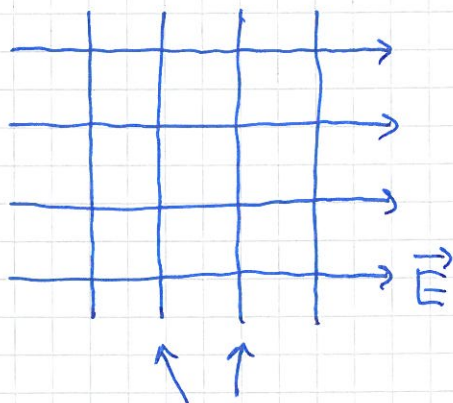
$$\Downarrow$$
$$\vec{E} \perp d\vec{s} \quad \text{när förflyttningen } d\vec{s} \text{ föregår på en equipot. fläte}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} \perp \text{equipotential fläte}}$$

Exs 1: Punktladning

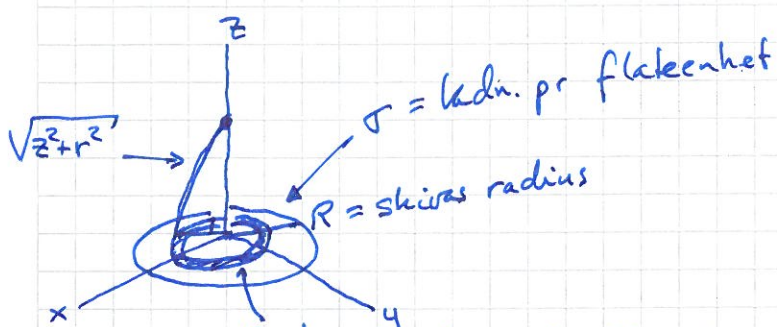


Exs 2: Uniformt $\vec{E}$ -fält



Eks: $V(z)$ og $\vec{E}(z)$ på akse til uniformt ladet skive
(Jf. øving 8)

(82)



Smal ring, radius r , bredde dr , areal $dA = 2\pi r \cdot dr$,
ladning $dq = \sigma dA = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr$, afstand $\sqrt{z^2 + r^2}$ til
punkt på z -aksen, bidrag $dV = dq / 4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + r^2}$ til
potensialet $V(z)$.

$$\Rightarrow V(z) = \int dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{r^2 + z^2} \right]_0^R$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left\{ \sqrt{z^2 + R^2} - z \right\}$$

I grensen $z \ll R$ (dvs stort plan): $\sqrt{z^2 + R^2} \approx R$

$$\Rightarrow V(z) \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (R - z)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) \approx -\hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} \approx \underline{\underline{\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}}} \quad (\text{som funnet i øving 8})$$

Materialers elektriske egenskaper

83

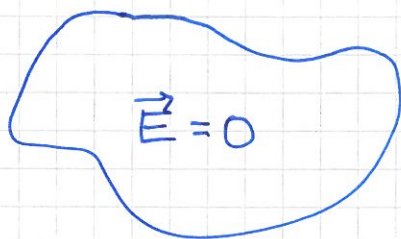
Metaller/Ledere: TM 21.2, 22.5; LHL 19.8 (YF 22.5)

Isolatorer/Dielektrika: TM 24.4, 24.5; LHL 20.5 (YF 24.4, 24.5)

Metaller/Ledere

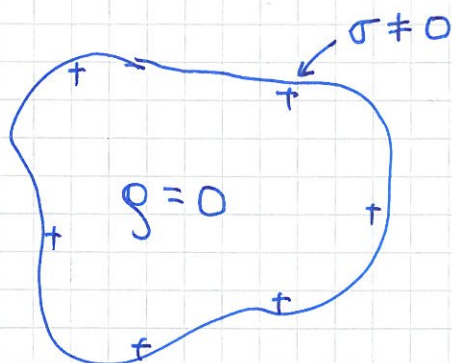
Har frie (mobile) ladninger som kan bevege seg i metallet hvis de utsettes for krefter.

Elektrostatiske egenskaper for metaller:



Inni metallet er $\vec{E} = 0$

(Hvis ikke $\vec{E}$ er lik null, er heller ikke kraften $\vec{F} = q\vec{E}$ lik null på en fri ladning q , og da har vi ikke likevekt!)

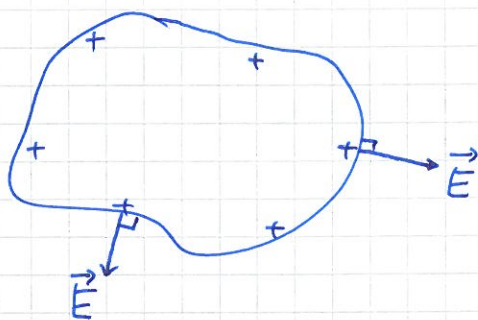


Hvis metallbiten har netto ladning, må all netto ladning ligge på overflaten.

(Forklares ofte med at enkeltladningene frastøter hverandre, og derfor velger å ligge på overflaten, "lengst mulig unna hverandre". Dette er bare delvis riktig! At ledningsfetteten $\rho = 0$ overalt inni metallet skyldes at $F \sim 1/r^2$ (og ikke f.eks. $1/r^{1.5}$ e.l.)

På metallens overflate er $\vec{E} \perp$ overflaten.

(84)



(Hvis $\vec{E}$ hadde komponent $E_{||}$ tangentielt til overflaten, ville $F_{||} \neq 0$ på frie ladninger på overflaten. Men da har vi ikke lenger likevekt, og ladninger ville flytte på seg, inntil $E_{||} = 0$.)

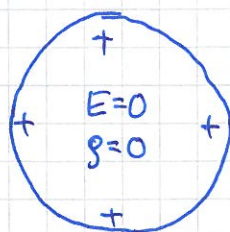
[Det kan vises at $|\vec{E}| = \sigma / \epsilon_0$ på metallens overflate når den lokale ladning pr flateenhet er σ . Vi beviser ikke dette her.]

På og inni en metallbit er $V = \text{konstant}$, dvs en metallbit er et ekvipotensial i elektrostatisk likevekt.

($dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$; inni er $\vec{E} = 0$, på overflaten er $\vec{E} \perp d\vec{s}$ når $d\vec{s}$ er "i overflaten". Uansett blir $dV = 0$, dvs $V = \text{konst.}$)

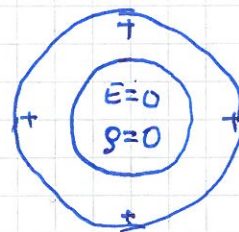
Leder med hulrom har $E = 0$ i hulrommet, og all netto ladning på ytre overflate.

Bevis:

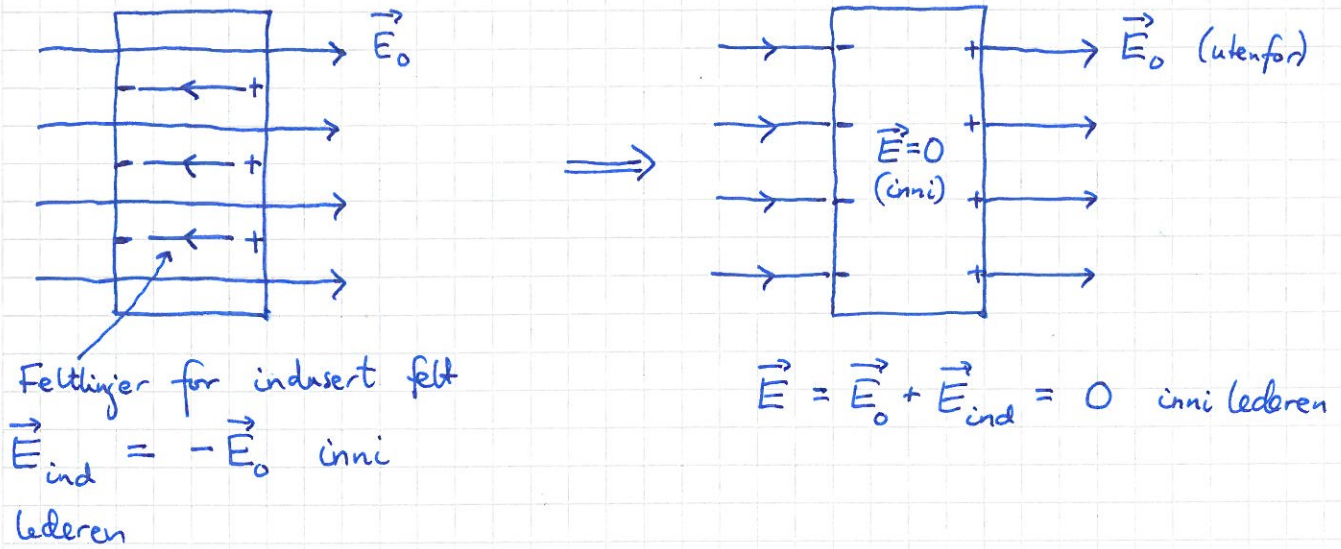


Komplett metall

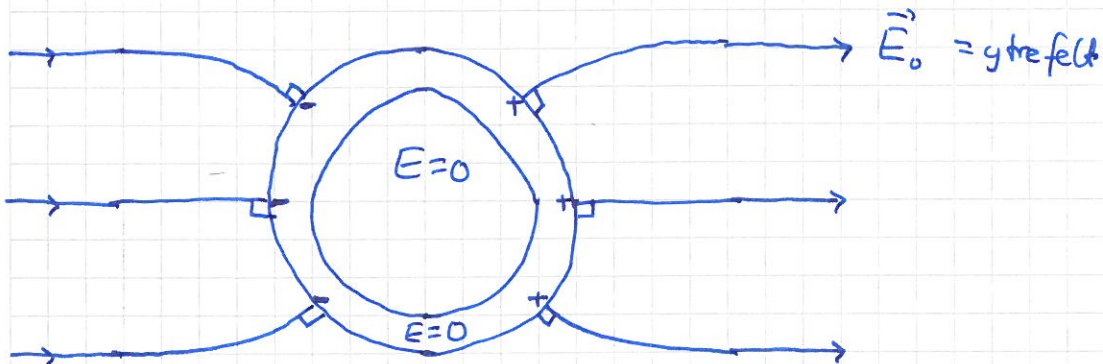
Ta bort
nøytral bit
inni; gjør
da ingen endring,
verken på $\vec{E}$ eller
 ρ



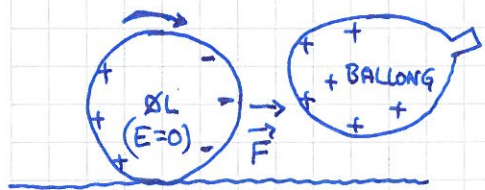
Leder i ytre felt $\vec{E}_0$:



Faradaybur: Leder med hulrom



Demo med ølboks (tom!) og ballong:



- Gnir ballong og tilfører den netto ladning.
- $\vec{E}$ -fellet fra ladd ballong (autz f.eks. pos. ladning) tiltrekker elektronen i metallet og inducerer overflateledning som vist i figuren.
- $E=0$ inni ølboksen (Faradaybur!)
- Kortest avstand fra pos. ladd, på ballongen til negativ ladd, på boksen
⇒ netto tiltrekning
⇒ boksen ruller mot høyre!