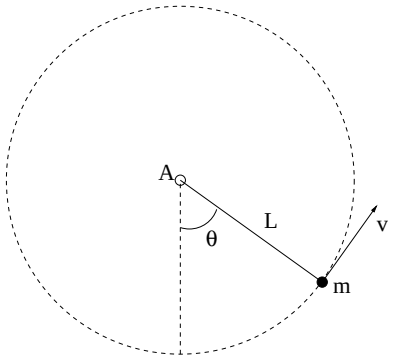
TFY4104 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2015.
Numerisk øving med obligatorisk innlevering på itslearning.
Veiledning: 12. - 30. oktober. Innleveringsfrist: 1. november kl 23.59.

Matematisk pendel



Figuren til venstre viser en matematisk pendel, bestående av ei kule (punktmasse) med masse m i enden av ei masseløs stang med lengde L. Stanga kan svinge omkring festepunktet (A), slik at kula følger en sirkelbane med radius L. Dersom kula svinger fritt, uten å påvirkes av andre ytre krefter enn tyngdekraften og "stangdraget", er bevegelsen bestemt av ligningen

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0.$$

(N2 tangentielt til sirkelbanen. Vi har brukt sammenhengen mellom hastighet og vinkelhastighet ved sirkelbevegelse.)

For små utsving fra likevekt, $|\theta| \ll 1$, kan $\sin\theta$ erstattes med θ, og vi har en enkel harmonisk oscillator, med kjent løsning, og med vinkelfrekvens ("egenfrekvens") $\omega_0 = \sqrt{g/L}$. Men for større utsving fra likevekt må vi beholde $\sin\theta$, og da kan ligningen ovenfor ikke løses analytisk. Numerisk er det imidlertid ingen problemer! En enkel og intuitiv numerisk måte å bestemme $\theta(t)$ på er den såkalte Euler-metoden. N2 kan skrives på formen

$$dv = a\,dt = \frac{F}{m}\,dt.$$

Det betyr at hastigheten ved tidspunktet $t+dt$ kan bestemmes dersom vi kjenner hastigheten ved tidspunktet t:

$$v(t+dt) = v(t) + a\,dt = v(t) + dv = v(t) + \frac{F}{m}\,dt.$$

Med et *endelig* tidssteg Δt blir ligningen

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \Delta v = v(t) + \frac{F(t)}{m}\,\Delta t$$

bare tilnærmet riktig, men formodentlig en riktig *god* tilnærmelse dersom Δt velges tilstrekkelig liten.
Samme oppskrift kan vi i neste omgang bruke for å bestemme posisjonen, eller som her, vinkelen $\theta(t)$. Vi har $v = ds/dt = L\,d\theta/dt$, dvs

$$d\theta = \frac{v}{L}\,dt,$$

og med endelig tidssteg gir dette

$$\theta(t+\Delta t) = \theta(t) + \Delta\theta = \theta(t) + \frac{v(t)}{L}\,\Delta t.$$

Hvis vi nå, som her, kjenner $\theta(t=0)$ og $v(t=0)$, dvs $\theta(0) = \theta_0$ og $v(0) = v_0$, kan ligningene over brukes til å finne $\theta(\Delta t)$ og $v(\Delta t)$, deretter $\theta(2\Delta t)$ og $v(2\Delta t)$ osv. I vårt konkrete tilfelle er det tyngdens tangentialkomponent som bestemmer akselerasjonen, og dermed hastigheten tangentielt,

$$a = \frac{F}{m} = -g\sin\theta.$$

Oppgaver:

- Lag et program i Matlab eller Python som beregner $\theta(t)$.
- La pendelen ha lengde 1.00 m. Tyngdens akselerasjon er 9.81 m/s^2.
- Kjør programmet med startvinkel $\theta_0 = 0$, og med tre ulike verdier for starthastigheten v_0:
  (A) Med tilstrekkelig liten v_0 til at pendelen med god tilnærmelse utfører harmoniske svingninger med vinkelfrekvens $\sqrt{g/L}$.
  (B) Med v_0 slik at pendelen svinger *nesten* helt opp til toppen av sirkelbanen. Hvor lang periode T klarer du å lage?
  (C) Med tilstrekkelig stor v_0 til at pendelen passerer toppen av sirkelbanen, gjerne med god margin.
- For hvert av de tre tilfellene (A), (B) og (C), lag en figur der vinkelen θ plottes, i enheten grader, som funksjon av tiden t i intervallet fra $t = 0$ til $t = 2T$. Perioden T vil være forskjellig i de tre tilfellene. Figurene skal ha tekst på aksene, 't (s)' for horisontal akse og 'θ (grader)' for vertikal akse. Figurene lagres som PDF-filer, med navn `brukernavn_FIGA.pdf` osv, evt samlet i en PDF-fil. Verdien du har brukt for starthastigheten v_0 kan angis som tittel på den aktuelle grafen.
- For minst ett av de tre tilfellene (A), (B), (C), sjekk i hvilken grad mekanisk energi (pr masseenhet) $E/m = (K+U)/m$ er bevart, ved å regne den ut og plotte den som funksjon av t i programmet. Figuren skal ha teksten 'E/m (m^2/s^2)' på vertikal akse og 't (s)' på horisontal akse. Figuren lagres med navn `brukernavn_FIGD.pdf`. Angi med figurtittel for hvilket av de tre tilfellene energien pr masseenhet plottes.

Frivillige ekstraoppgaver:

- Utvid programmet ditt slik at du kan studere en dempet fri svingning. Anta at friksjonskraften (luftmotstanden) er proporsjonal med hastigheten.
- Utvid programmet ditt slik at du kan studere en tvungen dempet svingning, med samme type friksjon som i forrige punkt. La den ytre kraften variere harmonisk med tiden, og studer fenomenet resonans.