

**TFY4104 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2016.**  
**Løsningsforslag til øving 8.**

**Oppgave 1.**

a) **C**

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = m\mathbf{a}$$

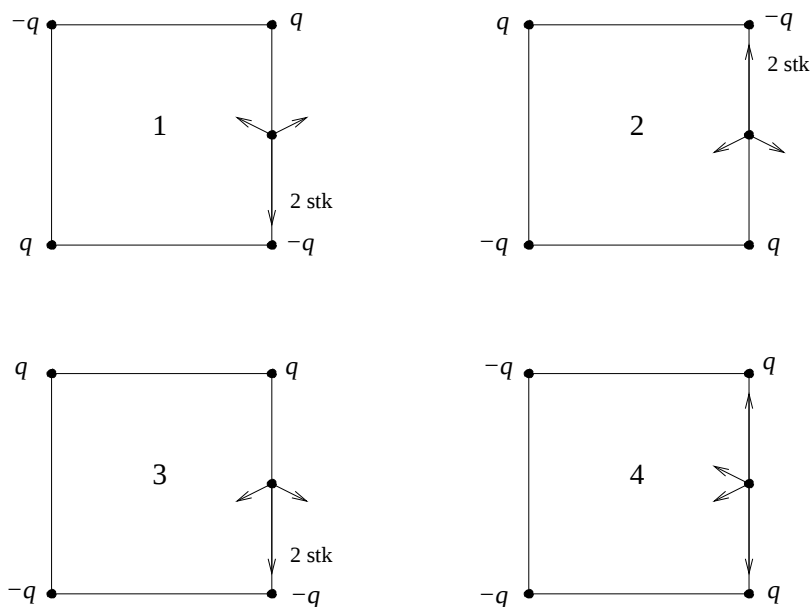
Newtons 2. lov. Her er  $q = -e$ , så elektronets akselerasjon blir

$$\mathbf{a} = -\frac{e}{m}\mathbf{E}$$

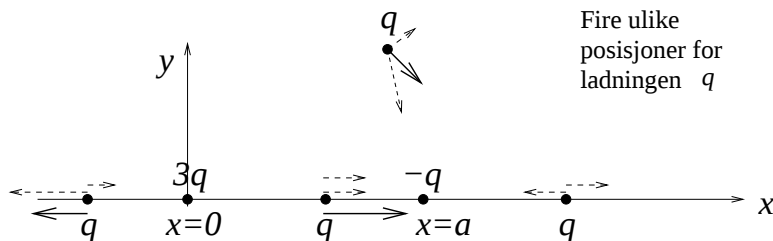
altså mot venstre.

b) **C**

Totalt elektrisk felt i P er vektorsummen av bidragene fra de fire punktladningene. Konfigurasjonen i figur 3 gir den største feltstyrken. (Ingen feltbidrag har her komponent oppover.)



## Oppgave 2



a) Punktladningen  $q$  er i likevekt dersom kraften på den er lik null. Her virker det to krefter, en frastøtende fra  $3q$  og en tiltrekkende fra  $-q$ , og disse to kan bare kansellere hverandre dersom de har eksakt motsatt retning. Det er ikke mulig dersom  $q$  er plassert utenfor  $x$ -aksen, f.eks. som i figuren over. (Her er de to enkeltkomponentene av kraften angitt med stippledde piler og totalkraften med heltrukken pil.) Derfor må eventuelle likevektsposisjoner være på  $x$ -aksen.

b) Vi har fått oppgitt at det er *en* likevektsposisjon  $x_0$  for  $q$  på  $x$ -aksen. Vi kan ikke ha  $x_0$  mellom 0 og  $a$ , for på dette intervallet peker de to kraftkomponentene i samme retning. Vi kan heller ikke ha  $x_0$  til venstre for  $x = 0$ , for da er avstanden mellom  $q$  og  $3q$  alltid mindre enn avstanden mellom  $q$  og  $-q$ , og følgelig den frastøtende kraften  $3q^2/4\pi\epsilon_0 x_0^2$  alltid større enn den tiltrekkende kraften  $q^2/4\pi\epsilon_0 (a - x_0)^2$ . Altså må  $x_0 > a$ . Vi bestemmer  $x_0$  ved å sette total kraft lik null:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 x_0^2} \hat{x} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (x_0 - a)^2} \hat{x} \\ \Rightarrow \frac{3}{x_0^2} &= \frac{1}{(x_0 - a)^2} \\ \Rightarrow 3x_0^2 - 6ax_0 + 3a^2 &= x_0^2 \\ \Rightarrow 2x_0^2 - 6ax_0 + 3a^2 &= 0 \\ \Rightarrow x_0 &= \frac{6a}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{36a^2 - 24a^2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} a \simeq 2.37a \end{aligned}$$

Da forutsetningen var  $x_0 > a$ , er løsningen med negativt fortegn foran kvadratroten ikke en aktuell løsning. (Den tilsvarer  $x \simeq 0.63a$ , hvor begge kraftkomponenter er like store og har *samme* retning.)

Stabiliteten av likevektsposisjonen  $x_0$  bestemmes kanskje enklest ved å se på nettokraften når  $x \gg x_0$ . Da "ser" punktladningen  $q$  tilnærmet en punktladning  $3q - q = 2q$  og må følgelig erfare en netto frastøtende kraft. Vi vet at kraften er null bare i  $x = x_0$ . Da må kraften peke mot høyre for alle  $x > x_0$ , også for en liten forflytning til høyre for  $x_0$ , mens den må peke mot venstre for en liten forflytning til venstre for  $x_0$ . Dermed er likevekten ustabil mhp en forflytning langs  $x$ -aksen.

Alternativt, med litt regning: La oss først forenkle notasjonen ved å innføre funksjonen  $f(x)$ :

$$\mathbf{F}(x) = F(x) \hat{x} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3}{x^2} - \frac{1}{(x - a)^2} \right) \hat{x} \equiv \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} f(x) \hat{x}$$

Deretter bestemmer vi  $df/dx$  i  $x = x_0$ :

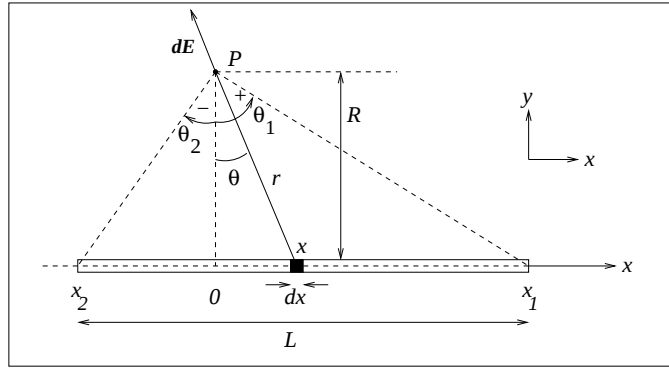
$$\left( \frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} = -\frac{6}{x_0^3} + \frac{2}{(x_0 - a)^3} \simeq -\frac{6}{(2.37a)^3} + \frac{2}{(1.37a)^3} \simeq \frac{0.33}{a^3} > 0$$

Da  $f(x_0) = 0$  og  $f'(x_0) > 0$ , er likevekten ustabil.

## Oppgave 3

a) Med "linjeladning" (dvs: ladning pr lengdeenhet)  $\lambda$  må ladningene  $dq$  og  $Q$  på henholdsvis en liten lengde  $dx$  og på hele staven bli

$$dq = \lambda dx \quad Q = \lambda L$$



b) Elektrisk felt fra lengdeelement  $dx$  i posisjon  $x$ :

$$d\mathbf{E} = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = A \frac{dx}{r^2} \hat{r}$$

der vi har innført  $A = \lambda/4\pi\epsilon_0$ . Fra figuren ser vi at denne vektoren har komponentene

$$dE_x = -dE \sin \theta = -\frac{A dx}{r^2} \sin \theta \quad dE_y = dE \cos \theta = \frac{A dx}{r^2} \cos \theta$$

Her har vi valgt  $x = 0$  når  $\theta = 0$ , og fortegnet stemmer med oppgaveteksten, dvs  $\theta > 0$  når  $x > 0$ . Vi bruker tipset i oppgaven og uttrykker  $dx$  og  $1/r^2$  ved vinkelen  $\theta$ :

$$\begin{aligned} x &= R \tan \theta \Rightarrow dx = \frac{R d\theta}{\cos^2 \theta} \\ r &= \frac{R}{\cos \theta} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \theta}{R^2} \\ \Rightarrow \frac{dx}{r^2} &= \frac{d\theta}{R} \end{aligned}$$

De søkte komponentene  $E_x$  og  $E_y$  av feltet  $\mathbf{E}$  i punktet  $P$  fra hele staven får vi ved å integrere  $dE_x$  og  $dE_y$ :

$$\begin{aligned} E_x &= \int dE_x = -\frac{A}{R} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \sin \theta d\theta = \frac{A}{R} \Big|_{\theta_2}^{\theta_1} \cos \theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \\ E_y &= \int dE_y = \frac{A}{R} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \cos \theta d\theta = \frac{A}{R} \Big|_{\theta_2}^{\theta_1} \sin \theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \end{aligned}$$

Kommentar: Her kunne en ha vært "uheldig" og startet med sammenhengen  $x = r \sin \theta$ , som gir  $dx = r \cos \theta d\theta + \sin \theta dr$ , ettersom både  $\theta$  og  $r$  varierer med  $x$ . Men det går bra likevel: Vi har  $\cos \theta = R/r$ , dvs  $r = R/\cos \theta$ , og dermed

$$dr = -R \frac{1}{\cos^2 \theta} (-\sin \theta) d\theta$$

slik at

$$\begin{aligned} \frac{dx}{r^2} &= \frac{r \cos \theta d\theta + \sin \theta dr}{r^2} \\ &= \frac{\cos \theta d\theta \cdot \cos \theta}{R} + \frac{\sin \theta \cdot R \sin \theta d\theta}{R^2} \\ &= \frac{d\theta}{R} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \frac{d\theta}{R} \end{aligned}$$

c) Med  $P$  like langt fra stavens to ender er  $\theta_1 = -\theta_2$  og følgelig  $\cos \theta_1 - \cos \theta_2 = 0$  og  $\sin \theta_1 - \sin \theta_2 = 2 \sin \theta_1 = L/\sqrt{R^2 + L^2/4}$ . Dermed:

$$E_x = 0$$

og

$$E = E_y = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 R \sqrt{R^2 + L^2/4}}$$

Langt unna staven, dvs  $R \gg L$ : Vi kan nå erstatte kvadratroten med  $R$ , idet vi kan neglisjere  $L^2/4$  i forhold til  $R^2$ . Vi får da:

$$E \simeq \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Dette er det samme som feltet fra en punktladning  $Q$  i avstand  $R$ . Ikke uventet: Langt unna ser staven essensielt ut som en punktladning med total ladning  $Q = \lambda L$ .

d) En uendelig lang stav oppnår vi ved å la  $\theta_2 \rightarrow -\pi/2$  og  $\theta_1 \rightarrow \pi/2$ . Da blir igjen  $E_x = 0$  og følgelig

$$E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

Med andre ord: Feltet fra en uendelig lang linjeladning faller av som en over avstanden  $R$ .

#### Oppgave 4

a) Arealet av en tynn ring med radius  $R$  og bredde  $dR$  er  $dA = 2\pi R dR$ , slik at ladningen på en slik ring blir

$$dq = \sigma dA = 2\pi\sigma R dR$$

Arealet av skiva er  $A = \pi R_0^2$ , så skivas totale ladning blir

$$Q = \sigma A = \pi\sigma R_0^2$$

Hvis en ikke husker hva arealet av ei sirkelformet skive er (!), kan en selvsagt bestemme totalladningen  $Q$  ved å integrere  $dq$ :

$$Q = \int dq = \int_0^{R_0} 2\pi\sigma R dR = 2\pi\sigma \left[ \frac{R^2}{2} \right]_0^{R_0} = \pi\sigma R_0^2$$

Og om en heller ikke husker hva omkretsen av en ring er (!), kan ladningen på den tynne ringen bestemmes ved å starte med en liten vinkel  $d\phi$  og arealet avgrenset mellom  $R$  og  $R + dR$ . Dette arealet er  $Rd\phi \cdot dR$ , og integrerer vi dette uttrykket over  $\phi$  fra 0 til  $2\pi$ , får vi nettopp  $2\pi R dR$  som blir arealet av den tynne ringen med radius  $R$  og bredde  $dR$ .

b) Vi deler skiva opp i tynne ringer med bredde  $dR$  (se figur nedenfor). Alle punkter på ringen ligger i samme avstand  $r$  fra punktet på  $z$ -aksen. Diametralt motsatte punkter (evt arealer  $dA$ ) fører til at  $x$ - og  $y$ -komponentene til feltet forsvinner (jfr eksemplet fra forelesningene).  $z$ -komponenten blir

$$dE_z = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta$$

Da  $r$  er konstant rundt hele ringen, kan en la  $dQ$  være ladningen på hele den tynne ringen:

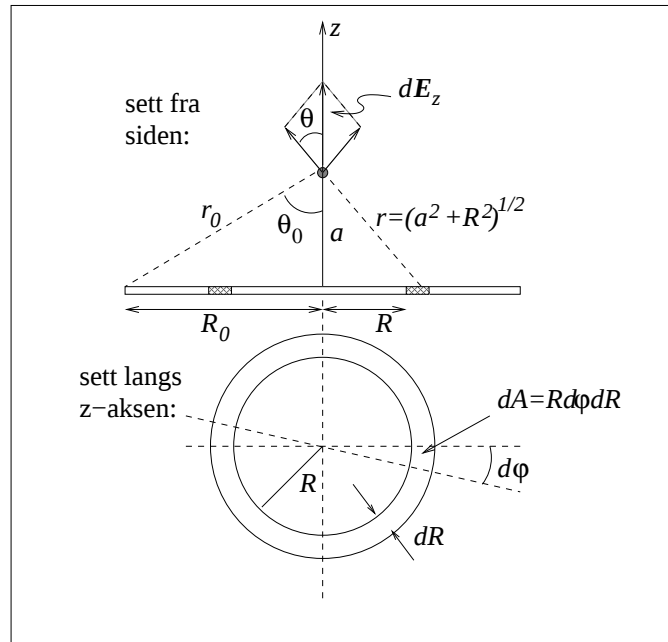
$$dQ = \sigma R dR \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi\sigma R dR$$

Dermed blir feltet fra hele skiva

$$E_z = \int dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{R_0} \frac{2\pi\sigma R a dR}{(a^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0} \left[ \frac{(-1)}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right]_0^{R_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R_0^2}} \right)$$

Her har vi benyttet at

$$\cos \theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$$



Et alternativ ville ha vært å bruke vinkelen  $\theta$  som integrasjonsvariabel:

$$\begin{aligned}
 \tan \theta &= \frac{R}{a} \Rightarrow d(\tan \theta) = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{dR}{a} \\
 r &= \frac{a}{\cos \theta} \\
 \int_0^{R_0} \frac{R dR}{r^2} \cos \theta &= \int_0^{\theta_0} \left( \frac{\cos \theta}{a} \right)^2 a \tan \theta \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta} \cos \theta = \int_0^{\theta_0} \sin \theta d\theta \\
 &= 1 - \cos \theta_0 = 1 - \frac{a}{r_0} = 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R_0^2}}
 \end{aligned}$$

der  $r_0$  og  $\theta_0$  er definert i figuren over.

c) Når  $a \gg R_0$ , kunne en i første omgang (som i oppgave 1c) tenke seg å erstatte  $\sqrt{a^2 + R_0^2}$  med  $a$ . Da får vi imidlertid bare den "trivielle" løsningen  $E_z = 0$ , mens vi er interessert i det dominerende ikke-forsvinnende bidraget til  $E_z$ . Det betyr at vi må rekkeutvikle  $\sqrt{a^2 + R_0^2}$  og ta med så mange ledd at vi alt i alt ender opp med noe som er forskjellig fra null:

$$\begin{aligned}
 E_z &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{a}{a\sqrt{1 + \frac{R_0^2}{a^2}}} \right) \\
 &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \left( 1 - \frac{R_0^2}{2a^2} + \dots \right) \right) \\
 &\simeq \frac{\sigma R_0^2}{4\epsilon_0 a^2} \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}
 \end{aligned}$$

Her har vi brukt tilnærmelsen som var gitt i oppgaveteksten,  $(1 + \alpha)^{-1/2} \simeq 1 - \alpha/2$ , med  $\alpha = R_0^2/a^2 \ll 1$ . Dette er feltet i avstand  $a$  fra en punktladning  $Q = \sigma A$ , der  $A = \pi R_0^2$  er arealet av sirkelskiva. Som forventet: Er vi tilstrekkelig langt borte, ser vi ikke forskjell på ei ladet skive og en punktladning.

I den motsatte grensen,  $R_0 \gg a$ , kan vi neglisjere leddet  $a/\sqrt{a^2 + R_0^2}$  i forhold til 1. Vi får da

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Altså et uniformt elektrisk felt som verken avhenger av avstanden  $a$  eller skivas utstrekning  $R_0$ . Dermed må dette være feltet utenfor et *uendelig stort plan* med ladningstetthet  $\sigma$ . Det er kanskje ikke umiddelbart opplagt at feltet da blir *uavhengig av avstanden* til planet, men slik er det altså! Selv om vi i praksis ikke har uendelig store flater til rådighet, er dette et viktig resultat: Med et stort ladet plan genererer vi et tilnærmet uniformt elektrisk felt i nærheten av planet, så lenge vi ikke kommer for nær planets ytterkanter. Vi skal bruke dette resultatet flere ganger senere, ikke minst i tilknytning til kondensatorer.