TFY4104 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2016.
Løsningsforslag til øving 9.

Oppgave 1.

a) **C**

$$\Delta V = -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

dersom

$$d\boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{E}$$

b) **B**

$$U = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = e \cdot \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} = e \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{10} = 14.4 \text{ eV}$$

c) **D**
Total potensiell energi for et system med punktladninger er

$$U = \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

der summen går over alle par av ladninger q_i og q_j i innbyrdes avstand r_{ij}. Her er alle ladninger like store i absoluttverdi. Vi har 4 par med motsatt fortegn i innbyrdes avstand 5 cm og 2 par (diagonalt) med likt fortegn i innbyrdes avstand $\sqrt{50}$ cm. Dermed får vi:

$$U = 9 \cdot 10^9 \cdot (9 \cdot 10^{-6})^2 \cdot \left[-\frac{4}{0.05} + \frac{2}{\sqrt{50} \cdot 10^{-2}}\right] \simeq -38 \text{ J}$$

d) **D**
Punktladningene Q_1 og Q_2 flyttes ikke, så innbyrdes potensiell energi for dette paret trenger vi ikke å bry oss om fordi den endres ikke når den tredje ladningen (elektronet) flyttes. Vi må regne ut potensiell energi som skyldes vekselvirkningen mellom elektronet og de to fastliggende ladningene, henholdsvis før og etter forflytningen. Alternativt kan vi regne ut potensialet fra ladningene Q_1 og Q_2 i punktene A og B, hhv V_A og V_B, og deretter endringen i potensiell energi, $\Delta U = U_B - U_A = -eV_B - (-e)V_A = -e(V_B - V_A)$. Potensialet i avstand r fra en punktladning q er

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

dvs Coulombpotensialet. De aktuelle avstandene her er 0.6 m (fra Q_1 til A og fra Q_2 til B) og $\sqrt{0.6^2 + 0.8^2} = 1.0$ m (fra Q_1 til B og fra Q_2 til A). Dermed:

$$V_A = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 0.6} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 1.0}$$

og

$$V_B = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 1.0} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 0.6}$$

som gir

$$\Delta V = V_B - V_A = -\frac{2(Q_1 - Q_2)}{3 \cdot 4\pi\varepsilon_0} = -\frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot (69 + 98) \cdot 10^{-9} = -1002 \text{ V}$$

og endelig

$$\Delta U = -e \cdot \Delta V \simeq +1 \text{ keV}$$

e) **B**. Potensialet fra en punktladning er $V(r) = q/4\pi\varepsilon_0 r$ når $V(r \to \infty)$ er satt til null. Med $V = 50$ V finner vi

$$r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 V} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-8}}{50} = 1.8 \text{ m}$$

Med SI-enheter for alle størrelser som inngår er vi garantert at svaret også kommer ut i SI-enhet, dvs m.

f) **D**

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr}\hat{r} \quad \Rightarrow \quad \text{graf 5}$$

Oppgave 2

a) Med vårt valg av polarvinkel θ ser vi fra figuren at

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \\ z &= r\cos\theta \\ r &= \sqrt{x^2 + z^2} \end{aligned}$$

b) Vi bruker superposisjonsprinsippet for å bestemme potensialet fra de to punktladningene. Med punktet (x, z) i en avstand r_1 fra q og en avstand r_2 fra $-q$ får vi

$$\begin{aligned} V(x,z) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (z - a/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z + a/2)^2}}\right) \end{aligned}$$

Avstandene r_1 og r_2 uttrykt ved x og z ser vi direkte fra figuren.

Potensialet på x-aksen blir

$$V(x,0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2/4}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2/4}}\right) = 0$$

Potensialet på z-aksen blir

$$V(0,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|z - a/2|} - \frac{1}{|z + a/2|}\right)$$

Legg merke til at vi her må bruke absoluttverditegn hvis vi vil ha *ett* uttrykk som gjelder på *hele* z-aksen. Med $z > a/2$:

$$\frac{1}{|z-a/2|} - \frac{1}{|z+a/2|} = \frac{1}{z - a/2} - \frac{1}{z + a/2} = \frac{a}{z^2 - a^2/4}$$

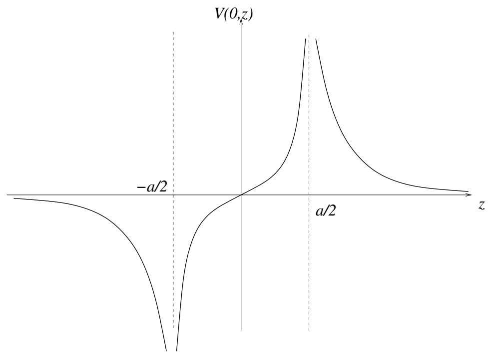
Med $z < -a/2$:

$$\frac{1}{|z-a/2|} - \frac{1}{|z+a/2|} = -\frac{1}{z - a/2} + \frac{1}{z + a/2} = -\frac{a}{z^2 - a^2/4}$$

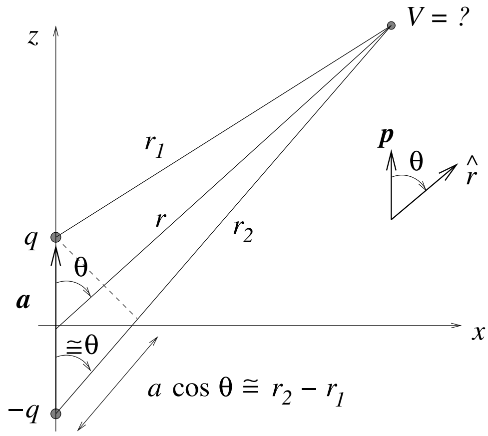
Med $-a/2 < z < a/2$:

$$\frac{1}{|z-a/2|} - \frac{1}{|z+a/2|} = -\frac{1}{z - a/2} - \frac{1}{z + a/2} = -\frac{2z}{z^2 - a^2/4} = \frac{2z}{a^2/4 - z^2}$$

Skisse av $V(0,z)$:



c) Vi bruker tipset gitt i oppgaveteksten, samt betraktning av følgende figur, og får:



$$
\begin{aligned}
V(r,\theta) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \\
&\simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{a\cos\theta}{r^2} \\
&= \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\
&= \frac{pr\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\
&= \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}
\end{aligned}
$$

Vi kan alternativt gå litt saktere fram: Fra figuren ser vi at

$$
\begin{aligned}
r_1 &\simeq r - \frac{a}{2}\cos\theta \\
r_2 &\simeq r + \frac{a}{2}\cos\theta
\end{aligned}
$$

Når $r \gg a$ kan vi rekkeutvikle både $1/r_1$ og $1/r_2$ omkring $1/r$ og får:

$$
\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \simeq \frac{1}{r - \frac{a}{2}\cos\theta} - \frac{1}{r + \frac{a}{2}\cos\theta}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{r}\left[\left(1-\frac{a\cos\theta}{2r}\right)^{-1}-\left(1+\frac{a\cos\theta}{2r}\right)^{-1}\right] \\
&\simeq \frac{1}{r}\left[1+\frac{a\cos\theta}{2r}-1+\frac{a\cos\theta}{2r}\right] \\
&= \frac{a\cos\theta}{r^2}
\end{aligned}
$$

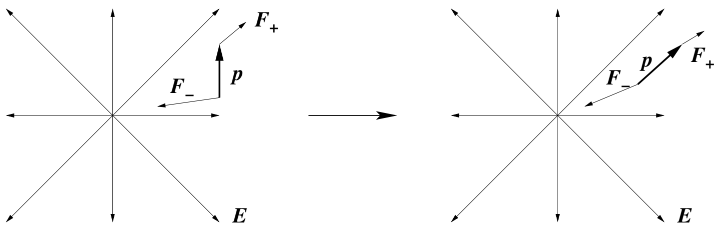
Er det så *rimelig* at potensialet fra en elektrisk dipol faller av raskere enn potensialet fra en punktladning (dvs en elektrisk "monopol")? Det er det, fordi dipolens negative og positive ladning bidrar med motsatt fortegn til det totale potensialet. Dermed vil bidragene til potensialet fra de to punktladningene delvis oppheve hverandre. (På x-aksen vil de to bidragene *eksakt* oppheve hverandre.)

Oppgave 3

a) På den positive ladningen virker en kraft $\boldsymbol{F}_+ = q\boldsymbol{E}$ og på den negative ladningen virker en kraft $\boldsymbol{F}_- = -q\boldsymbol{E}$. Total kraft blir summen av disse:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_+ + \boldsymbol{F}_- = q\boldsymbol{E} - q\boldsymbol{E} = 0$$

Kommentar: Hvis det elektriske feltet ikke er uniformt, vil det virke en netto kraft på dipolen:



Den ene enden av dipolen (her: den nederste, dvs den negative enden) vil være i et område med større elektrisk feltstyrke enn det er ved den andre enden av dipolen. Dermed vil dipolen trekkes i retning av økende elektrisk feltstyrke. Det er denne effekten som gjør seg gjeldende når en gnidd ballong sitter fast på veggen. Ballongen har netto ladning og omgir seg med et ikke-uniformt elektrisk felt. Elektriske dipoler i veggen tiltrekkes av ballongen, eller omvendt, ballongen trekkes mot veggen.

b)

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r}_+ \times \boldsymbol{F}_+ + \boldsymbol{r}_- \times \boldsymbol{F}_- = \frac{\boldsymbol{a}}{2} \times (q\boldsymbol{E}) + \left(-\frac{\boldsymbol{a}}{2}\right) \times (-q\boldsymbol{E}) = q\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$$

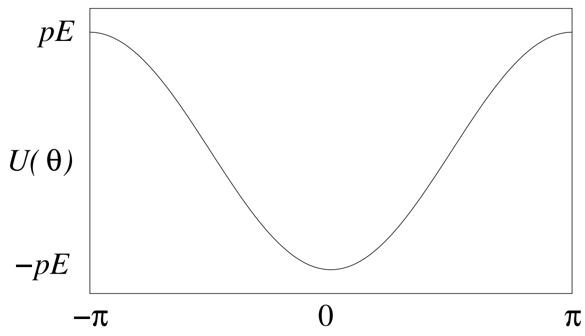
Bruker vi høyrehåndsregelen, ser vi at vektoren $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$ peker inn i papirplanet, dvs i negativ z-retning. Dermed:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{p} = -pE\sin\theta\,\hat{z}$$

c) Her har vi altså $dU = -\tau\, d\alpha$. Det betyr at en liten dreining av dipolen en vinkel $d\alpha$ under påvirkning av dreiemomentet τ resulterer i en endring dU i potensiell energi gitt ved $-\tau\, d\alpha$. Potensiell energi for en gitt verdi av vinkelen θ mellom $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{p}$, *i forhold til* en valgt referanse $U(\theta_0)$, blir da

$$
\begin{aligned}
U(\theta) &= \int_{\theta_0}^{\theta} dU \\
&= -\int_{\theta_0}^{\theta} \tau(\alpha)\, d\alpha \\
&= pE\int_{\theta_0}^{\theta} \sin\alpha\, d\alpha \\
&= pE\,(\cos\theta_0 - \cos\theta) \\
&= -pE\cos\theta
\end{aligned}
$$

Her valgte jeg å sette $U(0) = -pE$, dvs $\theta_0 = \pi/2$. Det spiller *ingen* rolle hvor jeg velger nullpunkt for U. Et like naturlig"valg ville ha vært $\theta_0 = 0$, som hadde gitt $U(0) = 0$ og $U(\pm\pi) = 2pE$.
Skisse:



Vi har minimal U, og følgelig stabil likevekt for $\theta = 0$, dvs for dipolen orientert slik at $\boldsymbol{p}$ er parallell med $\boldsymbol{E}$.
Konklusjon: Elektriske dipoler, f.eks. polare molekyler i et dielektrikum, retter seg inn langs det ytre ("påtrykte") elektriske feltet.