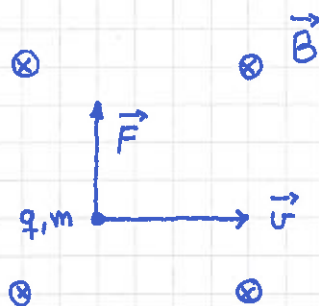


Ladet partikkel i uniformt magnetfelt [FM 26.2; LHL 23.1+4]

(108)

[⊗ inn i planet; ⊙ ut av planet]



$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

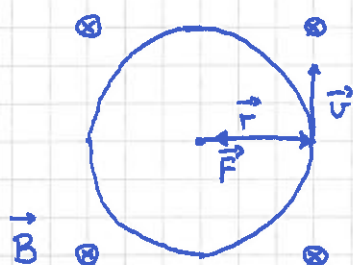
$$F = qvB \sin \theta \quad \vec{v} \perp \vec{B} \Rightarrow qvB$$

⇒ sirkelbevegelse med konstant v :

$$\vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{F} \perp d\vec{s}/dt \Rightarrow dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Dvs: Magnetisk kraft $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ utfører null arbeid

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}mv^2 = \text{konst.} \Rightarrow v = \text{konst.}$$



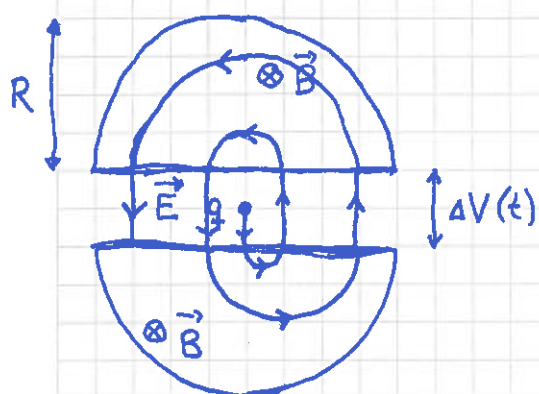
$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \hat{r} \quad (\text{sentripetalaksel.})$$

$$\Rightarrow qvB \stackrel{N2}{=} mv^2/r$$

$$\Rightarrow r = mv/qB$$

$$\Rightarrow \omega_c = v/r = \underline{qB/m = \text{syklotronfrekvensen}}$$

Eks: Prinsipp for partikkelakselerator (CERN; LHC)



• Når q er i $\vec{B}$: Sirkelbevegelse,
 $r = mv/qB$, $\omega_c = qB/m$

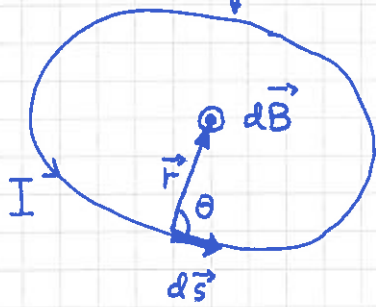
• Spenning $\Delta V(t) = V_0 \cos \omega_c t$ over "gap"
i midten $\Rightarrow \vec{E}(t) \Rightarrow$ økt v for
hver passasje

• $V_{\text{max}} = qBR/m$ [ikke-relativistisk]

• LHC: $R \approx 4\text{km}$, $B \approx 8\text{T}$, $K_{\text{proton}} \sim 7\text{TeV} \Rightarrow V_{\text{proton}} \approx c$

$\vec{B}$ fra elektrisk strøm [TM 27.2; LHL 23.5] [YF 28.2] (109)

(Lukket) Strømsløjfe

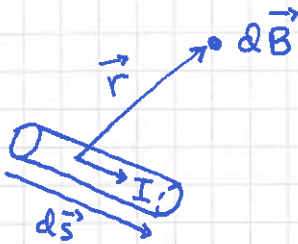


Empirisk lov:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

Biot-Savarts lov

Bidraget $d\vec{B}$ fra "strømelement" $I \cdot d\vec{s}$:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

Sammenlign med bidrag $d\vec{E}$ (til elektrisk f.e.) fra "ladningselement" dq :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{dq \cdot \hat{r}}{r^2} \quad (\text{Coulombs lov})$$

Vakuumpermeabiliteten: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$ (evt. $\frac{V \cdot s}{A \cdot m}$)

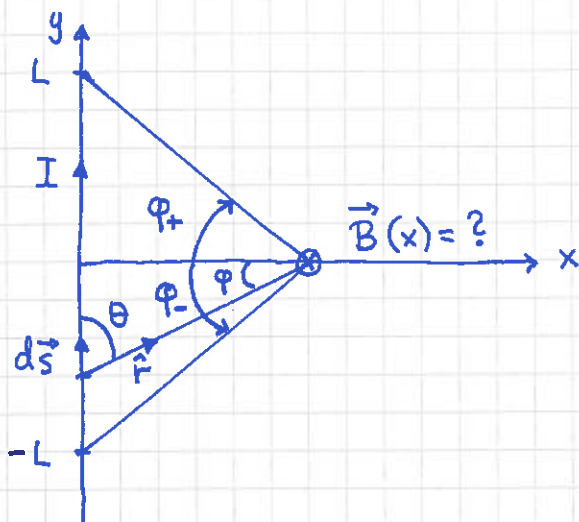
[Fra s. 89: $c^2 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1}$; c = lysets hastighed i vakuum]

3 vigtige eksempler følger!

[Mål: Forstå kretselementet spole, jf. s. 62!]

Ekse 1: $\vec{B}$ fra rett strømførende leder [TM 27.2; LHL 23.5] [YF 28.3]

110



Fra figuren:

$$\sin \varphi_+ = L / \sqrt{x^2 + L^2}$$

$$\sin \varphi_- = -L / \sqrt{x^2 + L^2}$$

$$\sin \theta = \frac{x}{r} = \cos \varphi$$

$$\tan \varphi = y/x$$

Bidrag $d\vec{B}$ fra $I d\vec{s}$:
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$d\vec{s} \times \hat{r} = dy \cdot 1 \cdot \sin \theta \cdot (-\hat{z}) ; \quad \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \varphi}{x^2}$$

$$y = x \tan \varphi \Rightarrow dy = x \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(x) = \int d\vec{B} = - \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi} \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \underbrace{\frac{x d\varphi}{\cos^2 \varphi}}_{dy} \cdot \underbrace{\cos \varphi}_{\sin \theta} \cdot \underbrace{\frac{\cos^2 \varphi}{x^2}}_{1/r^2}$$

$$= - \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi x} \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \cos \varphi d\varphi = - \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi x} \left\{ \sin \varphi_+ - \sin \varphi_- \right\}$$

$$= - \frac{\mu_0 I L \hat{z}}{2\pi x \sqrt{x^2 + L^2}} \quad (= \text{felt fra l ngde } 2 \cdot L)$$

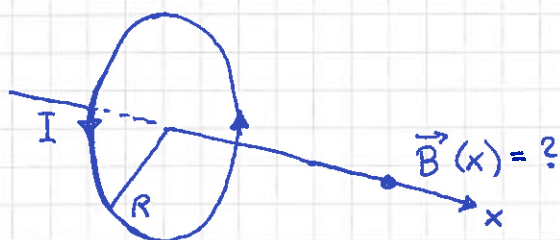
Hvis ∞ lang: $\sqrt{x^2 + L^2} \approx L$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(x) = - \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{z}}$$

Eks 2: $\vec{B}$ på aksen til sirkulær strømsløyfe

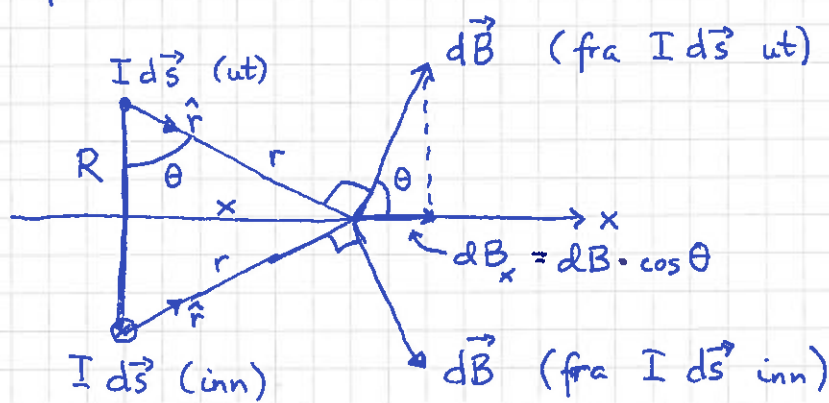
(111)

[TM 27.2; LHL 23.6] [YF 28.5]



- Strøm I i ring, radius R , sentrum i origo, ligger i yz -planet.
- Hva er $\vec{B}(x)$ på x -aksen?

Sett fra siden:

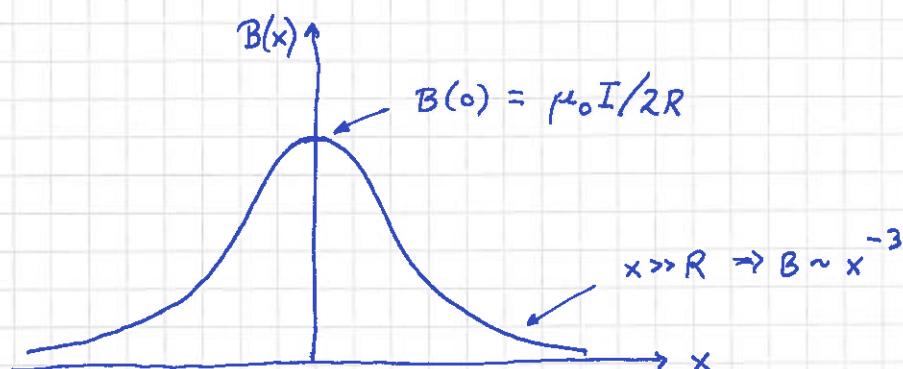


- symmetri $\Rightarrow \vec{B}(x) = B(x) \hat{x}$ (for alle x)

$$dB = \left| \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \right| = \frac{\mu_0 I}{4\pi (x^2 + R^2)} \cdot \underbrace{ds \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{2}}_{|d\vec{s} \times \hat{r}|}$$

$$\cos \theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{(x^2 + R^2)^{1/2}}$$

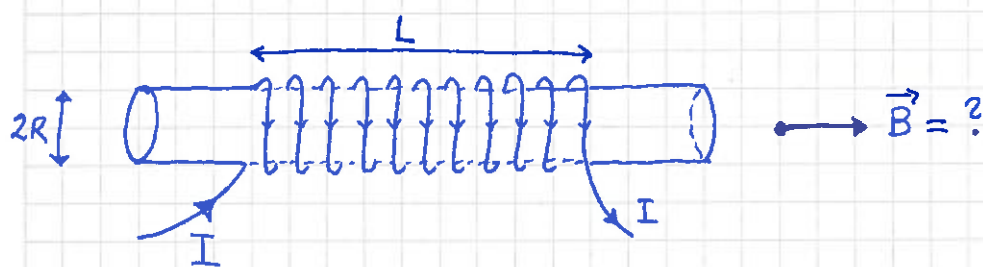
$$\Rightarrow B(x) = \oint dB_x = \frac{\mu_0 I R}{4\pi (x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \underbrace{\oint ds}_{=2\pi R} = \frac{\mu_0 I R^2}{2 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$



Eks 3: $\vec{B}$ på akse til strømførende spole

(112)

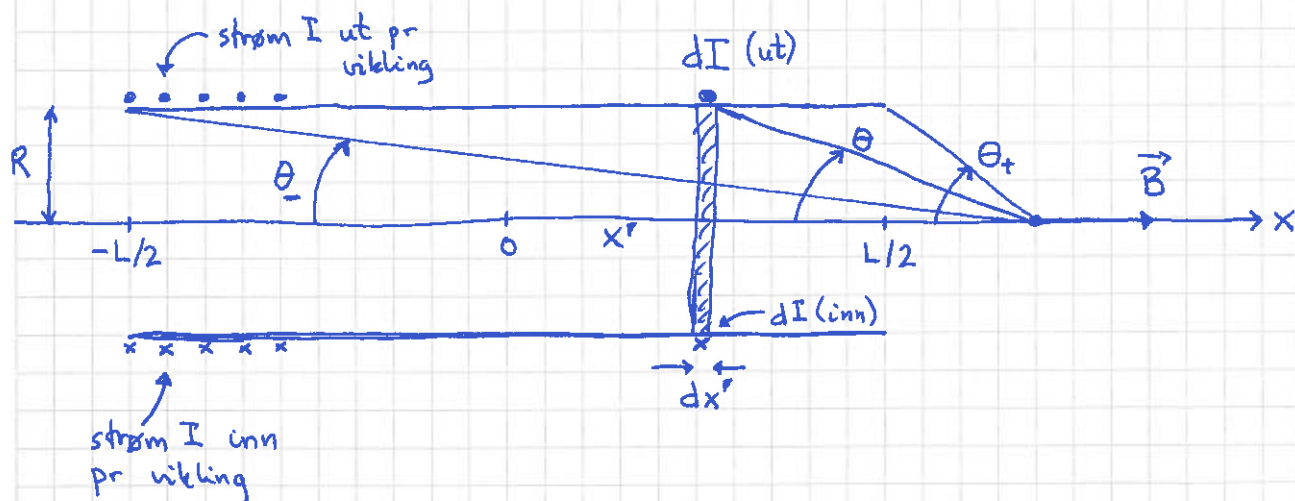
[TM 27.2 ; LHL 23.6] [YF 28.7]



- spole med N tettliggende viklinger på lengde L ($N=11$ i figuren over); viklingstetthet $n = N/L$
- hva blir $\vec{B}$ på spolens akse?

Løsning:

Med tettliggende viklinger kan vi betrakte dette som N strømførende ringer fordelt på lengden L :



viklinger på lengde $dx' = dN$ (# betyr her "antall")

$\frac{L}{L} = N$

$$\Rightarrow \frac{dN}{N} = \frac{dx'}{L} \Rightarrow dN = \frac{N}{L} dx' = n \cdot dx'$$

Braker resultatet s. III til å skrive ned bidraget dB fra strøm dI i ring med bredde dx' ved x' :

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot dI \cdot R^2}{2 \{ (x-x')^2 + R^2 \}^{3/2}}$$

Med dN viklinger på lengden dx' , med strøm I i hver viking, fås:

$$dI = I \cdot dN = I \cdot n \cdot dx' \quad (n = N/L)$$

Dermed:

$$B(x) = \int dB = \frac{\mu_0 I n R^2}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx'}{\{ (x'-x)^2 + R^2 \}^{3/2}}$$

Frå figuren s. 112 ser vi at

$$\cos \theta = \frac{x-x'}{\{ (x-x')^2 + R^2 \}^{1/2}} = \cos \theta_{\pm} \quad \text{for } x' = \mp \frac{L}{2}$$

Og siden

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left\{ \frac{y}{\sqrt{y^2+c}} \right\} &= \frac{1}{\sqrt{y^2+c}} + \frac{y \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot 2y}{(y^2+c)^{3/2}} = \frac{y^2+c}{(y^2+c)^{3/2}} - \frac{y^2}{(y^2+c)^{3/2}} \\ &= c / (y^2+c)^{3/2}, \end{aligned}$$

er det klart at

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx'}{\{ (x'-x)^2 + R^2 \}^{3/2}} = \left| \frac{x'-x}{R^2 \sqrt{(x'-x)^2 + R^2}} \right|_{-L/2}^{L/2}$$

$$= \frac{\frac{L}{2} - x}{R^2 \sqrt{(\frac{L}{2} - x)^2 + R^2}} + \frac{\frac{L}{2} + x}{R^2 \sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + R^2}}, \quad \text{og dermed er}$$

$$\underline{\underline{B(x) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left\{ \frac{\frac{L}{2} - x}{\sqrt{(\frac{L}{2} - x)^2 + R^2}} + \frac{\frac{L}{2} + x}{\sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + R^2}} \right\}}}$$

(PUH!)

Alternativt kan vi skrive

$$B(x) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \{ \cos \theta_- - \cos \theta_+ \}$$

Lang spole: $L \gg R$ (og $\frac{L}{2} \gg R$)

- Med x nær enden av spolen:

Da er enten $x = L/2$, dvs $\theta_- = 0$ og $\theta_+ = \pi/2$,
eller $x = -L/2$, dvs $\theta_- = \pi/2$ og $\theta_+ = \pi$.

I begge tilfeller blir

$$B(|x| \approx \frac{L}{2}) = \underline{\underline{\frac{1}{2} \mu_0 n I}}$$

- Med x inni spolen og langt unna begge ender:

Da er $\theta_- = 0$ og $\theta_+ = \pi$, slik at

$$\boxed{B = \mu_0 n I} \quad (\text{inni lang spole})$$

Det kan vises (ved å bruke den såkalte Amperes lov, som ikke er pensum her) at

$$B = \mu_0 n I$$

overalt inni en lang spole, dvs ikke bare på spolens akse (men under forutsetning av at det er "dypt" inni spolen, dvs langt unna begge ender)

Dette er vårt hovedresultat, som vi skal bruke som en tilnærming også for "reelle spoler".

På utsiden av en slik lang og tettviklet spole kan vi anta $B \approx 0$, da det her er mye svakere enn inni spolen.

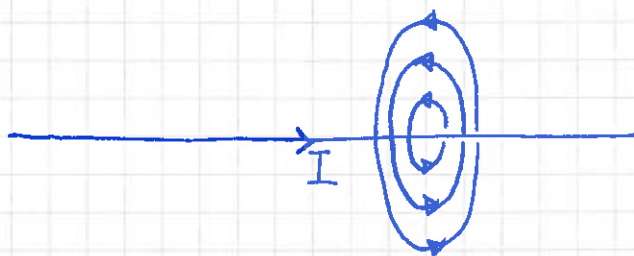
Feltlinjer for $\vec{B}$ [TM 26.1; LHL 23.1] [YF 27.3]

(115)

Som for $\vec{E}$ (se s. 71):

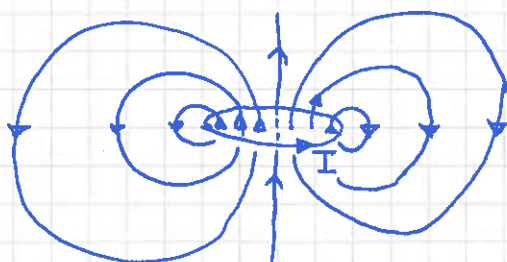
- Retning: Feltlinjene $\parallel \vec{B}$
- Absoluttverdi: $|\vec{B}|$ prop. med feltlinjetettheten

Eks 1: $\vec{B}$ fra lang rett strømførende leder

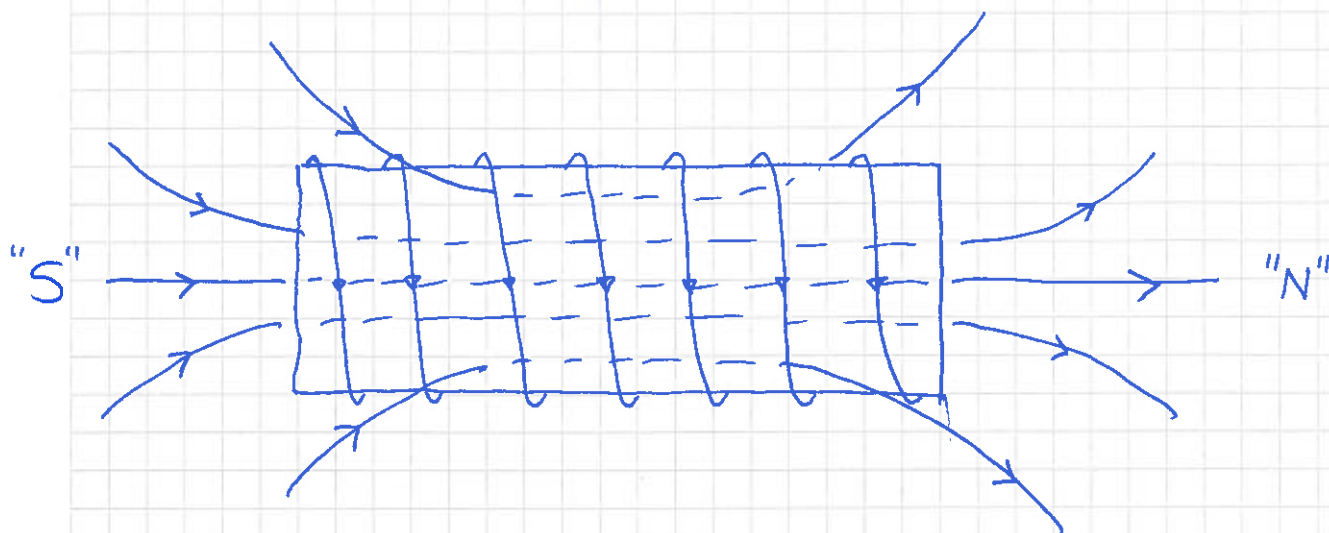


sirkler med sentrum på lederen

Eks 2: $\vec{B}$ fra strømførende ring



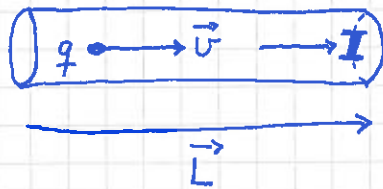
Eks 3: $\vec{B}$ fra lang, tettviklet spole



MERK: Alltid lukkede feltlinjer for $\vec{B}$. [Ingen "magnetisk ledning."]

Magnetisk kraft på elektrisk strøm [TM 26.1; LHL 23.2] [YF 27.6] (116)

$\vec{B} \otimes$



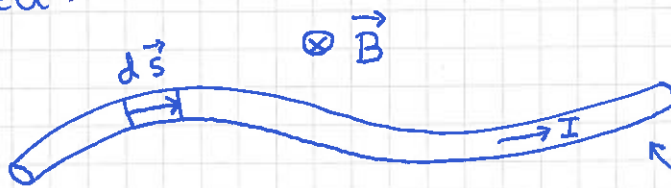
Bit av strømførende leder,
N frie ladninger q med
driftshastighet $\vec{v}$, lengde L

Kraft på de N frie ldn: $\vec{F} = Nq\vec{v} \times \vec{B}$

Strøm i ledaren: $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Nq}{L/v} = \frac{Nqv}{L}$
 $\Rightarrow I\vec{L} = Nq\vec{v}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}}$$

Generelt:



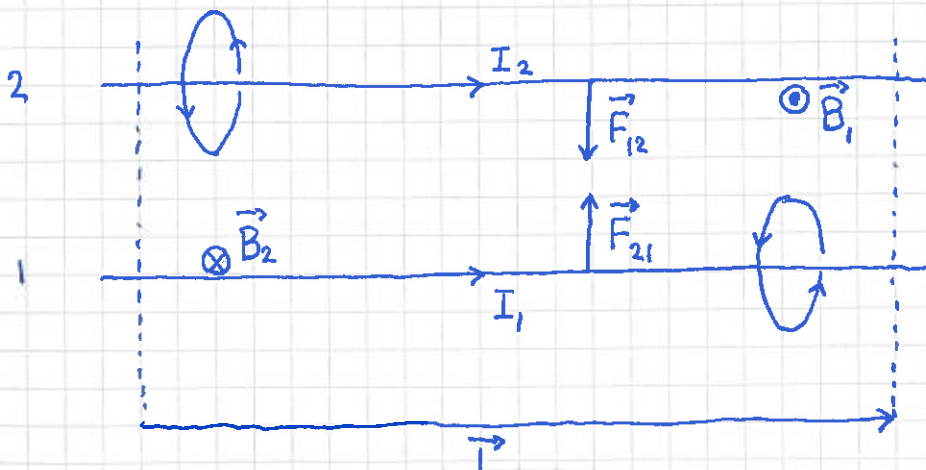
← leder med strøm I ,
lengde L

Kraft på $d\vec{s}$: $d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B}$

$\Rightarrow$ Total kraft på lengde L :

$$\boxed{\vec{F} = \int_L d\vec{F} = I \int_L d\vec{s} \times \vec{B}}$$

Eks: Kraft mellom to parallelle strømførende ledere
 [TM 27.2 ; LHL 23.5] [YF 28.4]



Magnetfelt fra 2 ved 1: $B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x}$ (inn i planet)

———— " ———— 1 ved 2: $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$ (ut av planet)

Kraft på lengde $\vec{L}$ av 1: $\vec{F}_{21} = I_1 \vec{L} \times \vec{B}_2$; $F_{21} = L \cdot \mu_0 I_1 I_2 / 2\pi x$

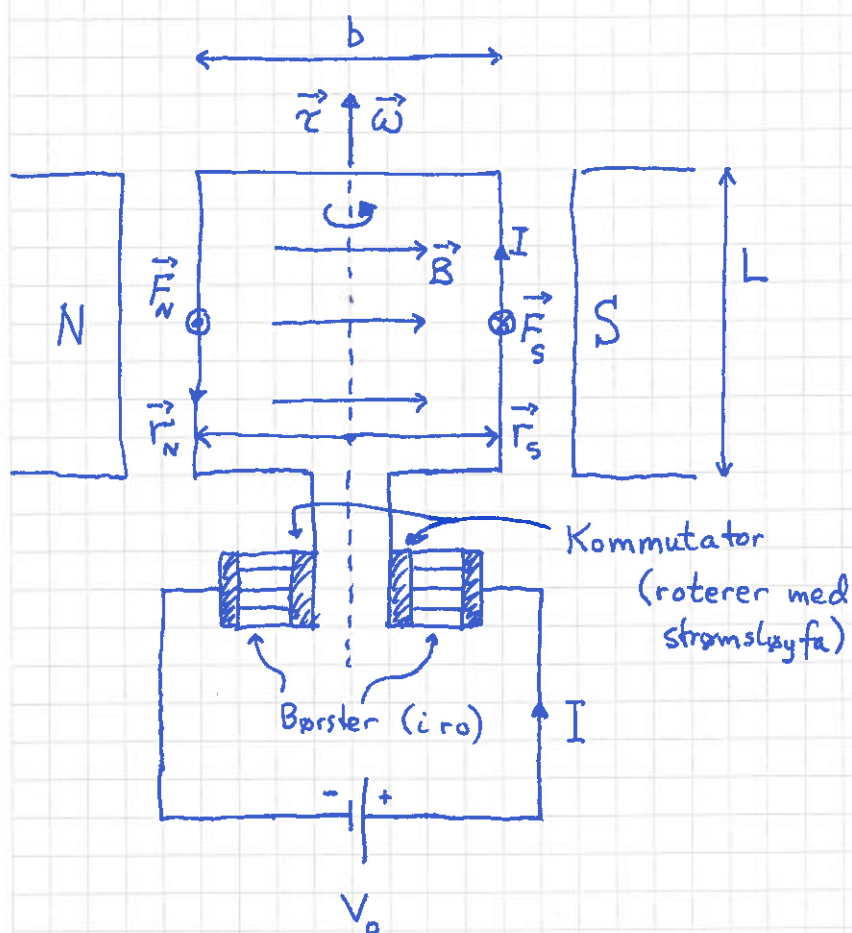
———— " ———— 2: $\vec{F}_{12} = I_2 \vec{L} \times \vec{B}_1$; $F_{12} = L \cdot \mu_0 I_1 I_2 / 2\pi x = F_{21}$

Kraft pr lengdeenhet :

$$f_{21} = F_{21} / L = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} = F_{12} / L = f_{12}$$

Hvis $I_1 \parallel I_2$: Tiltrekning ; Hvis $I_1 \parallel -I_2$: Frastøtning

Eks : Likestrømsmotor, prinsipp [TM 26.3; LHL 23.3] [YF 27.8]



$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$$

$$F_s = ILB \text{ (inn)}$$

$$F_N = ILB \text{ (ut)}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau_s = \frac{b}{2} ILB \sin\phi \text{ (opp)}$$

$$\tau_N = \text{————} \text{ (opp)}$$

(ϕ = vinkel mellom $\vec{r}$ og $\vec{F}$; i figuren er $\phi = 90^\circ$)

$$\Rightarrow \tau = \tau_s + \tau_N = IAB \sin\phi$$

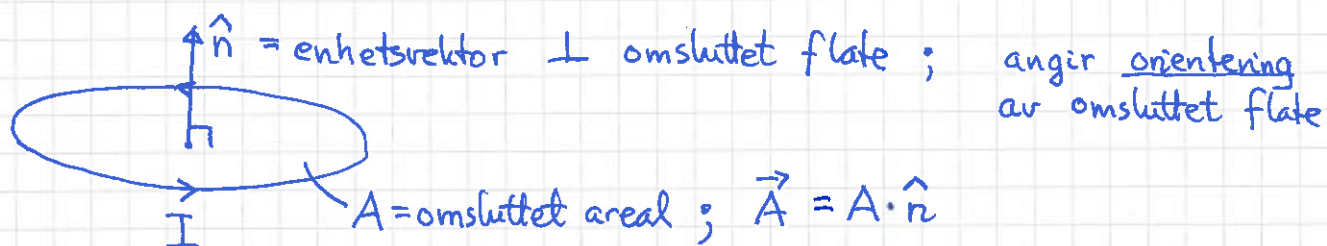
med $A = b \cdot L = \text{sløyfas areal}$

(DC spenningskilde)

Magnetiske dipoler og dipolmoment [TM 26.3; LHL 23.3, 26.2] [YF 27.7]

(118)

Strømsløyfe = Magnetisk dipol



H.h.regel : 4 fingre i strømmens retning gir $\hat{n}$ i tommelens retning.

Sløyfas magnetiske dipolmoment er :

$$\vec{m} \stackrel{\text{def}}{=} IA \hat{n} = I \vec{A}$$

[Notasjon i TM: $\vec{m} \rightarrow \vec{\mu}$]

Enhet : $[m] = A \cdot m^2$

Generell def:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \vec{j} dV ; \vec{j} = \text{strømtetthet}, dV = \text{volumeløst}$$

Sammenligning med elektrostatikk: (se s. 72)

$\vec{p} = q\vec{d} = \text{elektrisk dipolmoment}$

Generell def: $\vec{p} = \int \vec{r} dq = \int \vec{r} \rho dV ; \rho = \text{ladn. tetthet}$

I de generelle def av $\vec{m}$ og $\vec{p}$ skal det integreres over alle steder der hvor $\vec{j}$ og ρ er forskjellig fra null.