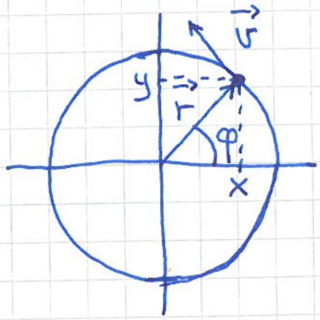
Sirkelbevegelse [YF 3.4; TM 3.3; LL 1.7, 1.8; HS 2.1.2]

Først: $v = |\vec{v}| = \text{konst.}$ (uniform sirkelbevegelse)



Fra figur: $x = r\cos\varphi \,,\quad y = r\sin\varphi$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2} = \text{konst.}$$

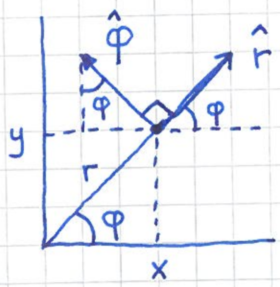
$$\vec{r} = r\cos\varphi\ \hat{x} + r\sin\varphi\ \hat{y}$$

$$\tan\varphi = y/x$$

Polarkoordinater: r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom x-aksen og $\vec{r}$

(positiv mot klokka)



$\hat{r} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$

= enhetsvektor radielt (bort fra origo)

$\hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$

= enhetsvektor angulært (mot klokka)

$$\hat{r}\cdot\hat{\varphi} = 0 \,, \quad \hat{r}\cdot\hat{r} = \hat{\varphi}\cdot\hat{\varphi} = 1$$

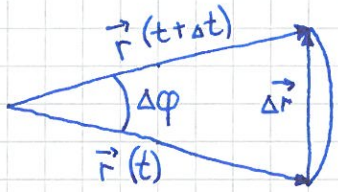
Vinkelhastighet = vinkelendring pr tidsenhet:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Vinkel = buelengde delt på radius:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r} \quad \Rightarrow \quad [\varphi] = \left[\frac{s}{r}\right] = \frac{m}{m} = 1 \quad \text{(evt. rad)}$$

$$\Rightarrow \quad [\omega] = [\varphi/t] = 1/s = s^{-1}$$

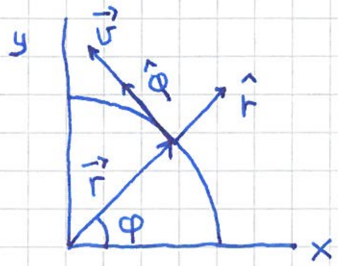


Δs = sirkelbueelement

Hvis $\Delta t \to 0$: $\Delta\varphi \to 0$, $\Delta\vec{r} \perp \vec{r}$, $|\Delta\vec{r}| \approx \Delta s = r \cdot \Delta\varphi$

Dermed:
$$\underline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\,\Delta\varphi}{\Delta t} = r\,\frac{d\varphi}{dt} = \underline{r\,\omega}$$

Retning på $\vec{v}$: $\vec{v} \parallel \Delta\vec{r}$ og $\Delta\vec{r} \perp \vec{r}$ $\Rightarrow$ $\underline{\vec{v} \perp \vec{r}}$



$$\vec{v} = v\,\hat{\varphi} = r\omega\,\hat{\varphi}$$

v = konst. $\Rightarrow$ ω = konst. $\Rightarrow$ φ endres lineært med t :

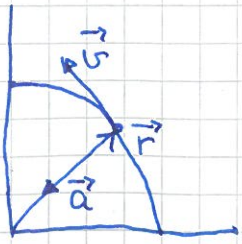
$$\omega = d\varphi/dt \Rightarrow \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} d\varphi = \int_0^t \omega\,dt \Rightarrow \varphi(t) = \varphi(0) + \omega t = \omega t$$

anta $\varphi(0) = 0$

Dermed:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} = r\cos\omega t\,\hat{x} + r\sin\omega t\,\hat{y}$$
$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\,\hat{x} + \dot{y}(t)\,\hat{y} = -r\omega\sin\omega t\,\hat{x} + r\omega\cos\omega t\,\hat{y}$$
$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\hat{x} + \ddot{y}(t)\,\hat{y} = -r\omega^2\cos\omega t\,\hat{x} - r\omega^2\sin\omega t\,\hat{y}$$

Dvs: $\boxed{\vec{a} = -\omega^2\,\vec{r}}$ Akselerasjon ved uniform sirkelbevegelse (sentripetalakselerasjon)



$$\vec{r} = r\,\hat{r}\ , \quad v = \omega r$$
$$\Rightarrow \vec{a} = -r\omega^2\,\hat{r} = -\frac{v^2}{r}\,\hat{r}$$

Flere nyttige størrelser for sirkelbevegelse:

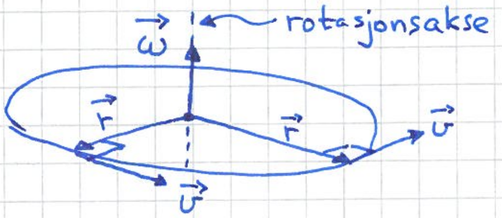
Vinkelakselerasjon: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ $\quad [\alpha] = s^{-2}$

Periode: T = tid pr omdreining $\quad [T] = s$

Frekvens: f = antall omdreininger pr tidsenhet $\quad [f] = Hz = s^{-1}$

Dermed: $v = \frac{2\pi r}{T}$, $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$, $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

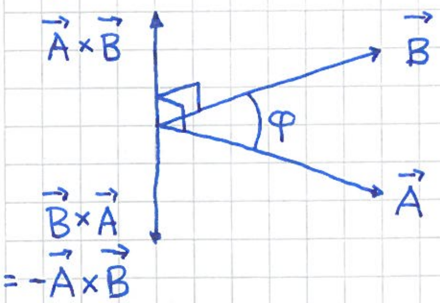
Vinkelhastighet som vektor:



La $\vec{\omega}$ peke langs rot. aksen

$\Rightarrow$ kan da skrive $\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$

Kryssprodukt:



- $\vec{A} \times \vec{B} \perp \vec{A}$ og $\vec{B}$
- Fortegn via høyrehåndsregel
- $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin\varphi$
  $= A \cdot B \cdot \sin\varphi$

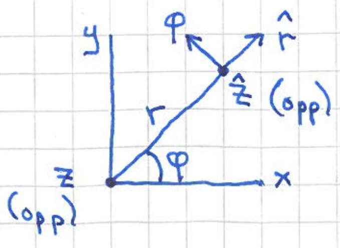
For sirkelbevegelsen:

$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin\frac{\pi}{2} = \omega r = v$, OK!

$\vec{\omega}$ opp $\Rightarrow$ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ mot klokka (og omvendt)

Enhetsvektorer og kryssprodukt:

$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$, $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$, $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$, $\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0$



$\hat{r} \times \hat{\varphi} = \hat{z}$, $\hat{\varphi} \times \hat{z} = \hat{r}$, $\hat{z} \times \hat{r} = \hat{\varphi}$

Newtons lover [YF 4,5; TM 4,5; LL 2,3; HS 2]

Empiriske lover (dvs: basert på eksperimenter, erfaring):

N1: $\boxed{\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{konst.}}$

Null netto ytre kraft ⇒ legemet forblir i ro eller i rettlinjet bevegelse med uendret hastighet.

N2: $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$

Netto ytre kraft $\vec{F}$ ⇒ legemet får akselerasjon proporsjonal med $\vec{F}$; m = legemets masse

N3: $\boxed{\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}}$

Hvis A virker på B med kraft $\vec{F}_{AB}$, så virker B på A med kraft $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$. Legemene A og B vekselvirker.

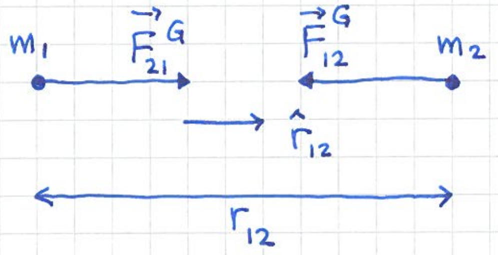
Enhet: $[F] = [m \cdot a] = kg \cdot m/s^2 = N$ (newton)

Fundamentale krefter i naturen
[YF 5.5; TM 4.2; LL 2.1; HS 2.2.2]

- Gravitasjon: Svak tiltrekning mellom legemer pga masse
- Elektromagnetisk: Tiltrekning eller frastøtning pga elektrisk ladning

(• Svake og sterke kjernekrefter: Kort rekkevidde, hhv ca 10^{-18} m og 10^{-15} m, beskriver hhv radioaktivitet og at kjernepartiklene holdes sammen.)

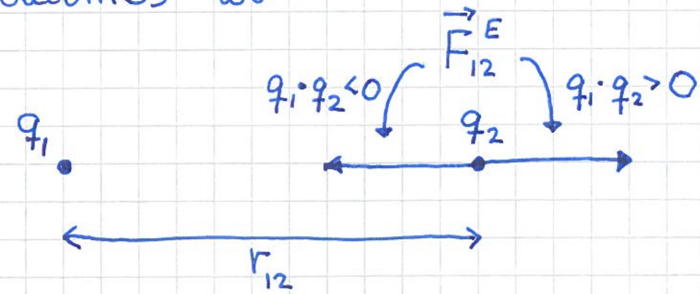
Newtons gravitasjonslov:



$$\boxed{\vec{F}^G_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}}$$

$G \simeq 6{,}67 \cdot 10^{-11} \ N m^2/kg^2$

Coulombs lov:



$$\boxed{\vec{F}^E_{12} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}}$$

$[q] = C$ (coulomb)

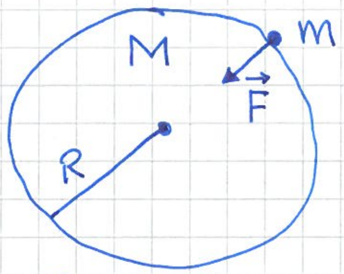
$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \ N m^2/C^2$; $\varepsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \ C^2/Nm^2$
(vakuumpermittiviteten)

Mellom 2 elektroner: $F^G/F^E \sim 10^{-43}$
[Sjekk selv! $m \sim 10^{-30}$ kg , $q \sim 10^{-19}$ C]

Mellom jorda og månen: $F^G/F^E \sim 10^{15}$
[Selv om vi antar netto ladning $q \sim 10^6$ C på begge]

"Dagligdagse" objekter er (omtrent) elektrisk nøytrale
⇒ coulombkreftene er i stor grad nøytralisert
⇒ "hverdagen" styres av både F^G og F^E

Masse og tyngde   [YF 4.4 ; TM 4.4 ; LL 2.5 ; HS 2.2.1]



Jorda

$M \simeq 6 \cdot 10^{24}$ kg , $R \simeq 6370$ km

$\Rightarrow$ m ved jordas overflate trekkes mot jordas sentrum med <u>tyngdekraften</u> $\vec{F}$.

$$F = |\vec{F}| = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \simeq m \cdot g$$

med $g = G \cdot M / R^2 \simeq 9.8 \; m/s^2$ = tyngdens akselerasjon

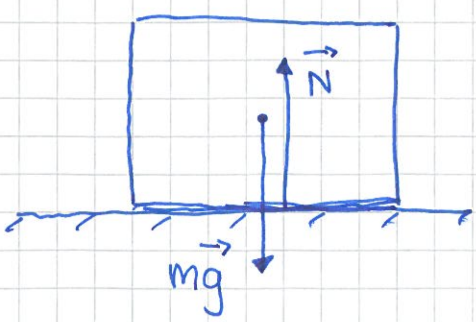
Huis mg er eneste kraft : fritt fall !

Da blir : $mg \overset{N2}{=} ma$, dvs $\underline{a = g}$

Coulombkrefter i mekanikken : Kontaktkrefter

[YF 4.1 ; TM 4.5 ; LL 3 ; HS 2.3]

Trykk-kraft (Normalkraft) :

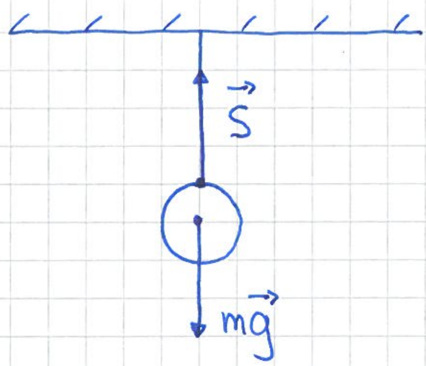


kloss i ro $\overset{N1}{\Rightarrow}$ $N = mg$

Normalkraften N er netto frastøtende coulombkraft fra underlaget på klossen.

[Spm : Hva er <u>motkreftene</u> (N3 !) til $\vec{N}$ og $m\vec{g}$?]

Strekk-kraft (Snordrag):

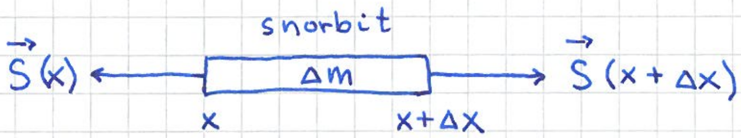


kule i ro $\xRightarrow{N1}$ $S = mg$

Snordraget S er netto tiltrekkende coulombkraft fra snora på kula

[Spm: Hva er motkraften til $\vec{S}$?]

Lett snor/stang antas ofte masseløs, $m_{snor} \approx 0$.

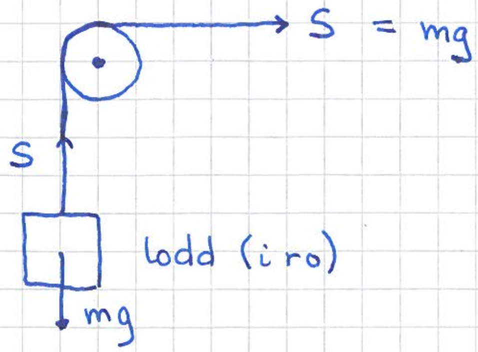


N2 : $\vec{S}(x+\Delta x) + \vec{S}(x) = \Delta m \cdot \vec{a}$

$\Rightarrow$ $\vec{S}(x+\Delta x) = -\vec{S}(x)$ huis $\Delta m = 0$ (og/eller $\vec{a} = 0$)

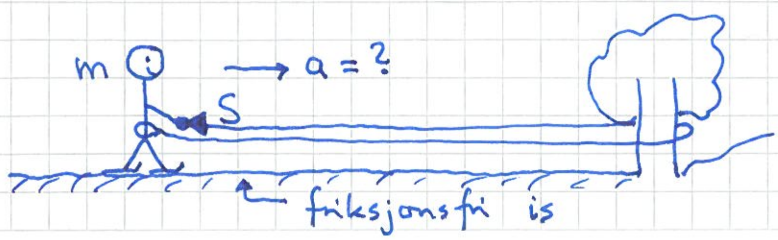
$\Rightarrow$ like stor $S = |\vec{S}|$ langs hele snora

Retningsendring med kant eller trinse :



[Spm: Hva huis vi har friksjon mellom tau og trinse/sylinder ?]

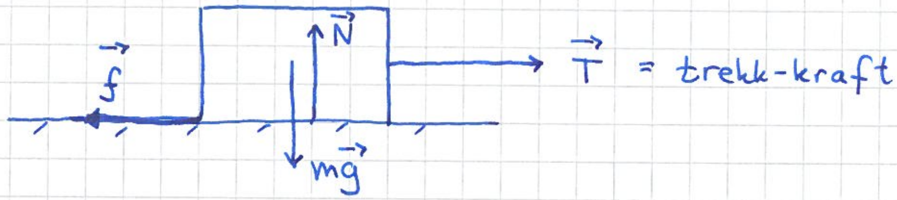
Spm:



Friksjon [YF 5.3 ; TM 5.1, 5.2 ; LL 3.1 ; HS 2.3]

coulombkraft / kontaktkraft $\vec{f}$ rettet mot (potensiell) relativ bevegelse

Tørr friksjon :



Statisk (kloss i ro) : N1 $\Rightarrow$ $f = T$

Empirisk : $f_{max} = \mu_s N$

Kinetisk (kloss i bevegelse) : $f = \mu_k N$

Friksjonskoeffisienter : μ_s , μ_k Enhet: $[\mu] = 1$

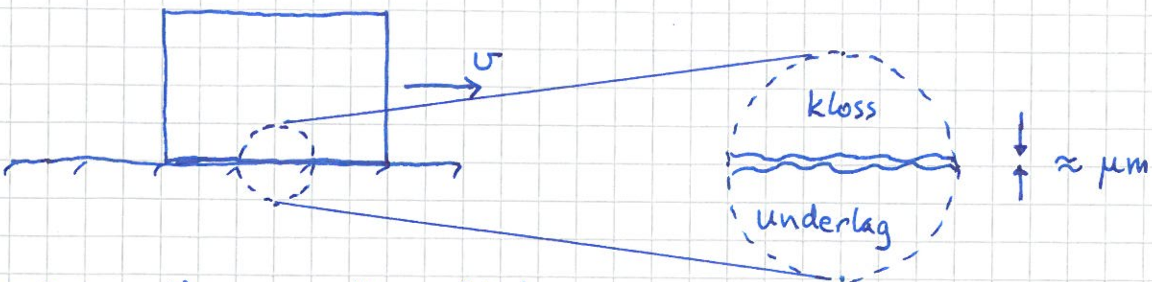
Noen tallverdier :

Tre mot tre : $\mu_s = 0.25 - 0.50$ $\mu_k \simeq 0.2$

Gummi mot tørr asfalt : $\mu_s \simeq 1.0$ $\mu_k \simeq 0.8$

—"— våt —"— : $\mu_s \simeq 0.3$ $\mu_k \simeq 0.25$

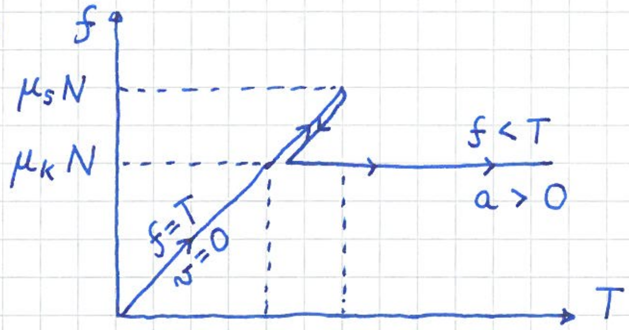
Hvorfor er $\mu_k < \mu_s$?



$v = 0$: godt grep mellom flatene

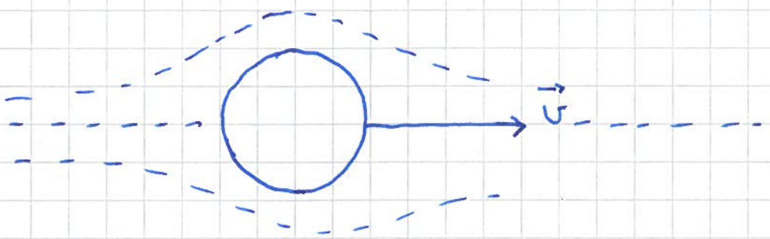
$v > 0$: "flyter" oppå

Dermed:



Friksjon i fluider (Våt friksjon)

[YF 5.3; TM 5.2; (LL 8); HS 2.3.4]



- liten v $\Rightarrow$ pen, <u>laminær</u> strømning av fluidet

  $$\vec{f} = -k\vec{v} = -kv\,\hat{v}$$ [kan utledes fra Newtons lover]

  Kule: $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$ Stokes' lov (Lab nr 1)

  R = kulas radius

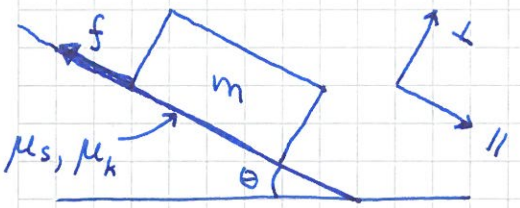
  η = fluidets viskositet

- stor v $\Rightarrow$ <u>turbulent</u> strømning

  $$\vec{f} = -Dv^2\,\hat{v}$$ (D for "drag")

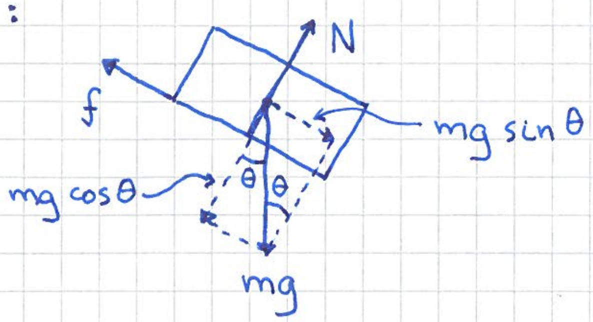
  [empirisk]

Lett eks: Kloss på skråplan



- Hva er f, med kloss i ro?
  — " — i bevegelse?
- Minimal μ_s for kloss i ro?
- $\mu_s < \mu_s^{min} \Rightarrow a_{\parallel} = ?$

Løsning:



(Fritt-Legeme-Diagram)

- I ro: $\Sigma F_{\parallel} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{f = mg \sin\theta}$

  I bevegelse: $f = \mu_k N = \underline{\mu_k \, mg \cos\theta}$

  (da $\Sigma F_{\perp} = 0 \Rightarrow N = mg \cos\theta$)

- I ro: $f \leq \mu_s N \Rightarrow$ begynner å gli når $f = \mu_s^{min} \cdot N$

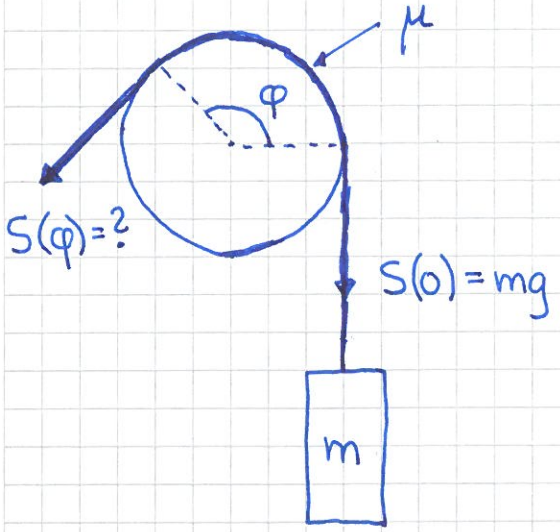
  $\Rightarrow \mu_s^{min} = f/N = mg \sin\theta / mg \cos\theta = \underline{\tan\theta}$

- Hvis $\mu_s < \mu_s^{min}$, dvs $\theta > \arctan \mu_s$:

  $a_{\parallel} = \Sigma F_{\parallel} / m = (mg \sin\theta - \mu_k \, mg \cos\theta)/m$

  $= \underline{g \, (\sin\theta - \mu_k \cos\theta)}$

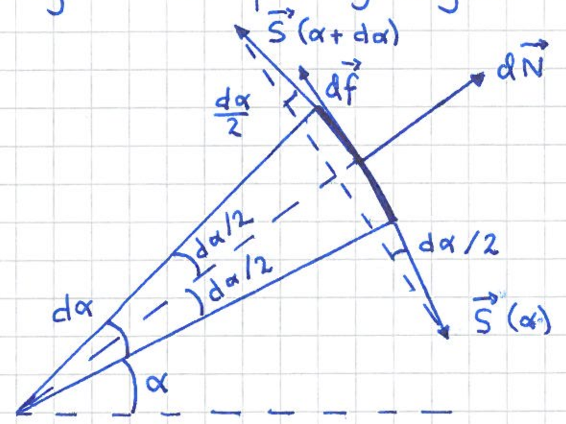
Vanskelig eks: Tau rundt sylinder



Eksp. med plastrør, hyssing og lodd viser at snordrag $S(\varphi)$ som er nødvendig for å <u>holde lodd oppe</u>, evt. heise opp lodd, avhenger <u>sterkt</u> av φ, der φ = vinkelen med kontakt mellom hyssing og rør.

<u>Bestem $S(\varphi)$</u>.

Løsning: Se på hyssingbit mellom α og $\alpha + d\alpha$:



$\vec{S}$ = kraft fra resten av hyssingen på hyssingbiten

$d\vec{N}$ = normalkraft fra rør på hyssingbit

$d\vec{f}$ = friksjonskraft ——— " ——— ; $df \leq \mu \cdot dN$

Minste nødvendige $S(\varphi)$ finnes når $df = \mu\, dN$.

Lodd i ro når $\vec{S}(\alpha + d\alpha) + \vec{S}(\alpha) + d\vec{N} + d\vec{f} = 0$ (N1)

Tangentielt: $S(\alpha + d\alpha) \cdot \cos\frac{d\alpha}{2} - S(\alpha) \cdot \cos\frac{d\alpha}{2} + df = 0$

Normalt: $S(\alpha + d\alpha) \cdot \sin\frac{d\alpha}{2} + S(\alpha) \cdot \sin\frac{d\alpha}{2} - dN = 0$

Når $d\alpha \to 0$:

$$\cos\frac{d\alpha}{2} \approx 1 \,, \qquad \sin\frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$$

$$S(\alpha+d\alpha) + S(\alpha) \approx 2S(\alpha)$$

$$S(\alpha+d\alpha) - S(\alpha) = dS$$

Dermed:

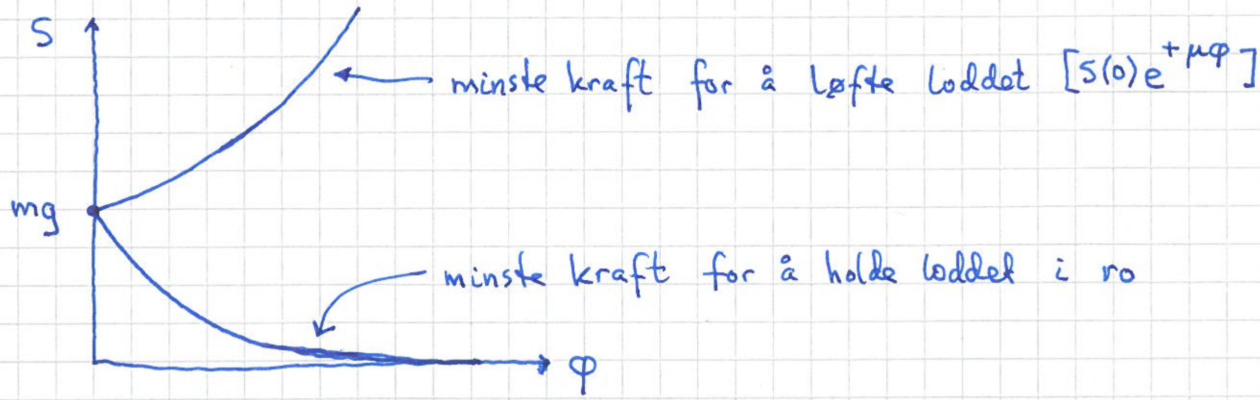
$$dS + \mu\, dN = 0$$

$$2S\cdot\frac{d\alpha}{2} - dN = 0$$

$$\Rightarrow \int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = -\int_0^{\varphi} \mu\, d\alpha$$

$$\Rightarrow \underbrace{\ln S(\varphi) - \ln S(0)}_{=\ln\frac{S(\varphi)}{S(0)}} = -\mu\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{S(\varphi) = S(0)\, e^{-\mu\varphi}} \qquad S(0) = mg$$



Med $\mu = 0.2$ og $2\,1/4$ "omdreining", dvs $\varphi = 2\cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} = 9\pi/2$:

$$S(\varphi)/S(0) = \exp(-0.2\cdot 9\pi/2) \approx 0.06$$