

TFY4104 Fysikk Løsningsforslag til eksamen 5. desember 2024

1F) $4 \cdot 10^5 \text{ rpm} = (4 \cdot 10^5 \cdot 2\pi/60) \text{ rad/s} = 4.2 \cdot 10^4 \text{ rad/s}.$

2E) Middelverdi: $\bar{v} = [(141 + 141 + 143 + 146 + 148)/5] \text{ cm/s} = 143.8 \text{ cm/s}.$ Standardavvik: $\delta_v = \sqrt{\sum_i (v_i - \bar{v})^2 / (N - 1)} \simeq 3 \text{ cm/s}.$

3F) Vertikal fart $v_y(t) = v_0 \sin \theta - gt$ er null i banens høyeste punkt, dvs etter en tid $t = (v_0/g) \sin \theta = [(25/9.81) \cdot \sin 60^\circ] \text{ s} = 2.2 \text{ s}.$

4D) $\cos(\omega_0 t)$ varierer mellom 1 og -1 , slik at maksimal vinkelfart er $0.20 \text{ rad/s}.$

5B) $\alpha = d\omega/dt = \omega_0^2 \sin(\omega_0 t)$, slik at maksimal vinkelakselerasjon er $\omega_0^2 = 0.010 \text{ rad/s}^2.$

6E) Total rotert vinkel etter en tid t er

$$\phi(t) = \int_0^t \omega(t) dt = \omega_0 t - \sin(\omega_0 t).$$

Etter 15 minutter er $t = 900 \text{ s}$ og $\omega_0 t = 90$ radianer, noe som gir $\phi = 90 - \sin(90) = 90 - 0.89 = 89.11$ radianer. Divisjon med 2π gir 14.18 runder, dvs 14 hele runder.

7A) $\tan \beta = dy/dx = -a \exp(-x/b) + (ax/b) \exp(-x/b)$, som i startposisjonen $x = 0$ er $-a = -1.50$. Dermed er banens helningsvinkel $|\beta| = \arctan(1.50) = 56^\circ.$

8F) Energibevarelse, med null fart i starthøyden $y(0)$ gir $mg[y(0) - y(x)] = 7mv(x)^2/10$, dvs $v(x) = \sqrt{10g[y(0) - y(x)]/7}$. Vi har $y(b) = -0.2207 \text{ m}$ i banens laveste punkt, samt $y(0) = 0$, og dette gir maksimal fart $176 \text{ cm/s}.$

9B) Null akselerasjon normalt på banen der banens krumning er lik null (dvs uendelig krumningsradius), dvs der $d^2y/dx^2 = 0$. Vi har

$$dy/dx = -a \exp(-x/b) + (ax/b) \exp(-x/b)$$

$$d^2y/dx^2 = (2a/b) \exp(-x/b) - (ax/b^2) \exp(-x/b)$$

Dvs, null akselerasjon normalt på banen i $x = 2b = 80 \text{ cm}.$

10D) På 12 timer har jorda rotert en vinkel $\phi_J = \pi \text{ rad}$, den ene veien. Dermed må satellitten rotere en vinkel $\phi_S = \pi \text{ rad}$ den andre veien på samme tid, for å være rett over stedet ved ekvator den hadde under seg for to timer siden. Det betyr at satellittens omløpstid (periode) er $T_S = 24 \text{ h} = 24 \cdot 3600 \text{ s}.$ Det er gravitasjonskraften GMm/r^2 som gir satellitten den nødvendige sentripetalakselerasjonen $v^2/r = (2\pi r/T_S)^2/r$. N2 gir da $GMT_S^2/(4\pi^2) = r^3$, dvs $r = [(GMT_S^2/(4\pi^2))]^{1/3}$. Med oppgitte tallverdier $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ og $M = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ blir $r = 42227 \text{ km} \simeq 42 \cdot 10^3 \text{ km}.$ (Som ventet samme radius som for en geostasjonær satellitt, som roterer samme vei som jordkloden.)

11C) $P = dK/dt$, $P = Fv$ og $v = at = (F/m)t$ gir $t = mv/F = mP/F^2 = (0.14 \cdot 750/2.4^2) \text{ s} = 18 \text{ s}.$

12A) Med kula ($m = 1.5 \text{ kg}$) i posisjon $x = 0$ og stanga ($M = 4.5 \text{ kg}$) mellom $x = 0$ og $x = L = 1.50 \text{ m}:$

$$X_{CM} = \frac{1}{m + M} \left(m \cdot 0 + M \cdot \frac{L}{2} \right) = \frac{4.5 \cdot 0.75}{6.0} \text{ m} = 56 \text{ cm}$$

13D) Kula bidrar med $I_k = mL^2$. Stanga bidrar med $I_s = I_0 + M(L/2)^2 = ML^2/12 + ML^2/4 = ML^2/3$, der vi brukte I_0 fra formelarket og Steiners sats med $d = L/2$. Alt i alt: $I = I_k + I_s = (m + M/3)L^2 = 3.0 \cdot 1.5^2 \text{ kgm}^2 = 6.8 \text{ kgm}^2$.

14C) Massesenteret (CM) og to nabokarbonatomer danner en likesidet trekant, slik at avstanden fra CM til hvert C-atom er 0.139 nm og til hvert H-atom 0.248 nm. Totalt treghetsmoment er derfor, i enheten $u \text{ nm}^2$:

$$I_0 = 6 \cdot (12 \cdot 0.139^2 + 1 \cdot 0.248^2) = 1.76$$

15B) Impulsbevarelse gir felles fart etter kollisjonen $v = [(2500 \cdot 20)/4250] \text{ m/s} = 11.76 \text{ m/s}$. Kinetisk energi før kollisjonen: $K_0 = 0.5 \cdot 2500 \cdot 20^2 \text{ J} = 500 \text{ kJ}$. Etter kollisjonen: $K = 0.5 \cdot 4250 \cdot 11.76^2 \text{ J} = 294 \text{ kJ}$. Dvs, 206 kJ gikk tapt i kollisjonen.

16E) N₂ gir en midlere kraft $F = ma = m\Delta v/\Delta t = [0.0575 \cdot (313/3.6)/0.0050] \text{ N} = 1.0 \text{ kN}$.

17D) Vi bruker rotasjonslikevekt mhp B (for da vil kraften mellom stanga i B og stupebrettet ikke inngå i ligningen). Her er $L = 3d$. Tyngdekraften på stupebrettet har da en arm $L/2 - d = d/2$, siden stupebrettets massesenter er midt på, og tyngdekraften på stuperen har en arm $L - d = 2d$. Kraften F_A fra stanga i A på stupebrettet har en arm d . Dermed:

$$F_A d = mgd/2 + 2Mgd \Rightarrow F_A = (m/2 + 2M)g = (10.0 + 160) \cdot 9.81 \text{ N} = 1.67 \text{ kN}$$

18A) Svingeperioden er $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{L/g} = 2\pi\sqrt{25/9.81} \text{ s} = 10.03 \text{ s}$. Antall hele svingninger i løpet av 45 minutter er dermed $45 \cdot 60/10.03 \simeq 269$.

19D) Ved maksimalt utsving har pendelkula null fart og befinner seg i en høyde

$$h = L - L \cos \theta_0 = 25 \text{ m} \cdot [1 - \cos(10^\circ)] = 0.38 \text{ m}$$

over kulas laveste punkt, der farten er maksimal. Energibevarelse gir da $v = \sqrt{2gh} = 2.7 \text{ m/s}$.

Alternativt (og enklere?): $\theta(t) = \theta_0 \sin \omega_0 t$ slik at $\dot{\theta}(t) = \omega_0 \theta_0 \cos \omega_0 t$, og dermed er $v_{\max} = L\omega_0 \theta_0 = \sqrt{gL}\theta_0 = \sqrt{9.81 \cdot 25} \cdot 10\pi/180 \text{ m/s} = 2.7 \text{ m/s}$.

20C) Etter divisjon med mL er bevegelsesligningen på formen

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = \frac{F_0}{mL} \cos(\omega t)$$

Da kan vi sammenligne med uttrykket for amplituden $A(\omega)$ i et masse-fjær-system, oppgitt i formelarket, og vi har på resonans:

$$\theta_0 = \frac{F_0/(mL)}{2\gamma\omega_0},$$

med $2\gamma = b/m = 0.50/40 = 0.0125 \text{ s}^{-1}$ og $\omega_0 = \sqrt{g/L} = 0.6264 \text{ s}^{-1}$. Den harmoniske kraftens amplitude er dermed (med θ_0 i radianer)

$$F_0 = \theta_0 \cdot mL \cdot 2\gamma\omega_0 = (10\pi/180) \cdot 40 \cdot 25 \cdot 0.0125 \cdot 0.6264 \text{ kgm/s}^2 = 1.4 \text{ N}.$$

21C) Aktuell posisjon ligger mellom de to positive ladningene, slik at de to bidragene til det totale elektriske feltet her peker i motsatt retning. Dermed, med $d = 1.00$ nm:

$$E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 d^2} \left[1 - \frac{1}{2^2} \right] = 9 \cdot 10^9 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot (3/4)/10^{-18} = 10.8 \cdot 10^8 \text{ V/m} = 1.1 \text{ V/nm}$$

22F) Vi kan anta at to ladninger e ligger fast på f.eks x -aksen i ± 1.50 nm, mens ladningen $4e$ med masse $12u$ ligger på y -aksen i $y = \sqrt{4.50^2 - 1.50^2}$ nm = 4.24264 nm. Av symmetrigrunner peker $\mathbf{E}$ i y -retning på y -aksen. Bidraget fra hver ladning e er

$$E_y = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta,$$

med $r = 4.50$ nm og $\cos \theta = 4.24264/4.50 = 0.94281$. Dette gir

$$E = 2E_y = 2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.94281/(4.50 \cdot 10^{-9})^2 = 1.34 \cdot 10^8 \text{ V/m}.$$

Med N2 blir da

$$a = 4eE/m = 4 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1.34 \cdot 10^8/(12 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27}) = 4.3 \cdot 10^{15} \text{ m/s}^2.$$

Med $1 \text{ s} = 10^9 \text{ ns}$ og $1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$ er dette det samme som $a = 4.3 \text{ mm/ns}^2$.

23C) Vi regner først ut potensialet $V(x)$ og deretter spenningen $V(2L) - V(3L)$:

$$V(x) = \int_0^L \frac{\lambda dx'}{4\pi\epsilon_0(x-x')} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \Big|_0^L [-\ln(x-x')] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{x}{x-L} \right).$$

Dermed:

$$V(2L) - V(3L) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} [\ln 2 - \ln(3/2)] = 10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \ln(4/3) = 2.6 \text{ kV}.$$

24F) $p = 2 \cdot 3Qa = 6Qa$

25A) $V(6a) = [Q/(4\pi\epsilon_0 a)] \cdot (1/2 + 1/3 - 1/5 - 1/6) = 7Q/(60\pi\epsilon_0 a)$

26E) $U = [Q^2/(4\pi\epsilon_0 a)] \cdot (1 + 1 - 2/3 - 1/2 - 1/4) = 7Q^2/(48\pi\epsilon_0 a)$

27D) Elektrisk feltstyrke i de to luftlagene (med sammenlagt tykkelse $d/2$) er $E_0 = \sigma/\epsilon_0$ og i plastlaget (tykkelse $d/2$) $E = E_0/\epsilon_r = \sigma/(\epsilon_r\epsilon_0) = E_0/5$. Her er $(\pm)\sigma = Q/A = Q/(\pi r^2)$ ladning pr flateenhet på metallplatene. Spenningen V mellom metallplatene er da $V = E_0 d/2 + (E_0/5)d/2 = 3E_0 d/5 = 3Qd/(5\pi r^2 \epsilon_0)$, dvs ladningen er $Q = 5V\pi r^2 \epsilon_0/(3d)$, som med $V = 540 \text{ V}$, $r = 0.10 \text{ m}$ og $d = 0.010 \text{ m}$ blir $Q = 25 \text{ nC}$.

[Alternativt kan dette betraktes som en seriekobling av to like tykke kondensatorer, med kapasitanser hhv $C_0 = \epsilon_0 A/(d/2)$ og $C_p = \epsilon_r \epsilon_0 A/(d/2)$. Det gir en total kapasitans $C = (1/C_0 + 1/C_p)^{-1}$, hvorefter $Q = CV$.]

28F) $C = 18 + (1/6 + 1/12)^{-1} = 18 + 4 = 22 \text{ nF}$.

29D) $C = (1/6 + 1/12 + 1/18)^{-1} = 36/11 = 3.3 \text{ nF}$.

30E) $R = [1/18 + 1/(6 + 12)]^{-1} = 9.0 \Omega$.

31A) $I = (12/18) \text{ A}$ slik at $P = VI = 12 \cdot 12/18 = 8.0 \text{ W}$.

32A) $v = \sqrt{2K/m_e} = \sqrt{2 \cdot 1000 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} / (9.11 \cdot 10^{-31})} = 1.8742 \cdot 10^7 \text{ m/s}$. N2 med $F = evB$ og $a = v^2/r$ gir $evB = m_e v^2/r$, dvs $r = m_e v / (eB) = 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 1.8742 \cdot 10^7 / (1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 30 \cdot 10^{-6}) \text{ m} = 3.6 \text{ m}$.

33C) I denne posisjonen står posisjonsvektoren $\mathbf{r}$ vinkelrett på vektoren $\mathbf{m}$, slik at $\mathbf{B} = -\mu_0 \mathbf{m} / (4\pi r^3)$, og dermed er $B = 10^{-7} \cdot 8 \cdot 10^{22} / (7 \cdot 10^6)^3 = 2.3 \cdot 10^{-5} \text{ T} = 23 \mu\text{T}$.

34B) Magnetisering er magnetisk dipolmoment pr volumenhet. Dermed: $M = m/V = 8 \cdot 10^{22} / [4\pi \cdot (6.4 \cdot 10^6)^3 / 3] \text{ A/m} = 73 \text{ A/m}$.

35C) $L = \mu_0 N^2 A / \ell = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 800^2 \cdot \pi \cdot 0.025^2 / 0.20 = 7.9 \text{ mH}$.

36F) La oss f.eks. anta at en strøm I i spolen med $N_1 = 500$ viklinger skaper et uniformt magnetfelt med feltstyrke $B = N_1 \mu_0 I / \ell$ inni begge spolene. Total magnetisk fluks som omslutes av de $N_2 = 1100$ vikklingene i den andre spolen er da $\phi = N_2 B A = N_2 N_1 \mu_0 I A / \ell$, slik at gjensidig induktans blir $M = \phi / I = N_2 N_1 \mu_0 A / \ell = 1100 \cdot 500 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \pi \cdot 0.040^2 / 0.40 = 8.7 \text{ mH}$.

37B) Motstanden er $R = \rho \ell / A = 1.59 \cdot 10^{-8} \cdot 2.00 / (0.0250 \cdot 10^{-6}) = 1.272 \Omega$ slik at midlere effekt blir $\langle P \rangle = (1/2) V_0 I_0 = V_0^2 / (2R) = 2.40^2 / 4.528 = 2.26 \text{ W}$.

38B) En faseforskjell π betyr at V_1 og V_2 svinger i motfase. Da har spenningen $V_1 - V_2$ en amplitude 48 V , og rms-verdien blir $48 / \sqrt{2} \text{ V} = 34 \text{ V}$.

[Alternativt: Oppgitt formel gir $\sin((a - b)/2) = \sin(\pi/2) = 1$, som gir amplitude $2 \cdot 24 \text{ V}$ for spenningen $V_1 - V_2$.]

39E) Egenfrekvensen er $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ i et udempet masse-fjær-system. Induktansen L spiller her rollen til m , mens kapasitansen C her spiller rollen til $1/k$, slik at egenfrekvensen i LC -kretsen er $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Perioden er dermed $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ som med $L = 25.0 \text{ mH}$ og $C = 0.102 \text{ mF}$ blir $T = 10 \text{ ms}$.

40A) På resonans er $I_0 = V_0/R = 1.50/3.00 = 0.50 \text{ A}$. (Spenningene over induktansen og kapasitansen adderer seg til null på resonans.)