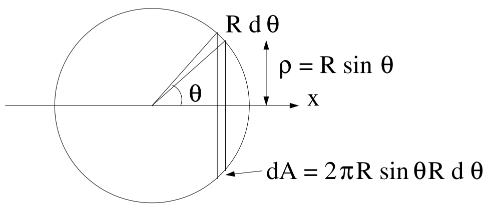
TFY4104/TFY4125 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til Ekstra 4.

E1



Vi setter $dm = M \cdot dA/A$, med $A = 4\pi R^2$ = arealet av hele kuleskallet og $dA = 2\pi\rho \cdot Rd\theta = 2\pi R \sin\theta \cdot Rd\theta$ = arealet av en smal ring med omkrets $2\pi R \sin\theta$ og bredde $Rd\theta$. Her er θ vinkelen mellom (rotasjons-)aksen og linjen fra kuleskallets sentrum ut til den smale ringen, se figur. Dermed:

$$I_0 = \int_0^\pi (R\sin\theta)^2 \cdot M \cdot \frac{2\pi R^2 \sin\theta d\theta}{4\pi R^2} = \frac{1}{2} M R^2 \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta.$$

Vi bruker tipset gitt i oppgaven og finner

$$\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta) = |_0^\pi \left(\frac{\cos 3\theta}{12} - \frac{3\cos\theta}{4}\right) = \frac{4}{3},$$

slik at

$$I_0 = \frac{2}{3} M R^2.$$

Vi betrakter ei kompakt kule som mange tynne kuleskall utenpå hverandre, hver med treghetsmoment $dI = 2r^2 dm/3$, radius r, masse $dm = M \cdot dV/V$, der $V = 4\pi R^3/3$ er kulas totale volum, og $dV = 4\pi r^2 dr$ er volumet til et kuleskall med radius r og tykkelse dr. Dermed:

$$I_0 = \int dI = \int_0^R \frac{2}{3} r^2 \cdot M \cdot \frac{4\pi r^2 dr}{4\pi R^3/3} = \frac{2M}{R^3} \int_0^R r^4 dr = \frac{2}{5} M R^2.$$

Alternativ metode: La x-aksen være rotasjonsaksen og del opp kula i tynne skiver med tykkelse dx og radius $\sqrt{R^2 - x^2}$, og dermed volum $dV = dx \cdot \pi(R^2 - x^2)$ og masse $dm = M dV/V = M \cdot dx \cdot \pi(R^2 - x^2)/(4\pi R^3/3)$. Treghetsmomentet til ei slik skive er $dI = dm \cdot (R^2 - x^2)/2$, slik at kulas treghetsmoment blir

$$\begin{aligned}
I &= \int dI \\
&= \frac{1}{2} \int dm \cdot (R^2 - x^2) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^R \frac{M \cdot dx \cdot \pi(R^2 - x^2)}{4\pi R^3/3} \cdot (R^2 - x^2) \\
&= \frac{3M}{4R^3} \int_0^R (R^4 - 2R^2 x^2 + x^4) dx \\
&= \frac{2}{5} M R^2
\end{aligned}$$