Stive legemer og enkel rotasjonsmekanikk

Massesenter [OS1 9.6]

N punktmasser $m_1, m_2, \ldots, m_N$ i posisjoner $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \quad ; \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i = \text{total masse}$$

Eks [TFY4125 21/5 - 24]: 6 punktmasser i xy-planet, m i $x=y=-3a$, $2m$ i $x=y=-2a$, $3m$ i $x=y=-a$, $4m$ i $x=y=a$, $5m$ i $x=y=2a$, $6m$ i $x=y=3a$. Hva er avstanden fra origo til massesenteret?

Løsning:

$$X_{CM} = Y_{CM} = \frac{1}{21m}\{-3ma - 4ma - 3ma + 4ma + 10ma + 18ma\}$$

$$= 22a/21 \Rightarrow R_{CM} = \sqrt{X_{CM}^2 + Y_{CM}^2} = \sqrt{2}\cdot 22a/21 = \underline{\underline{1.48a}}$$

Kontinuerlige massefordelinger:

$$\vec{r}_i \cdot m_i \rightarrow \vec{r}\, dm \quad ; \quad \sum_i \rightarrow \int$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm \quad ; \quad M = \int dm$$

$$dm = \text{masseelement} = \begin{cases} \lambda \cdot d\ell & (1D) \\ \sigma \cdot dA & (2D) \\ \rho \cdot dV & (3D) \end{cases}$$

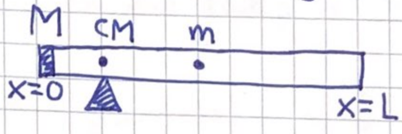
λ, σ, ρ = masse pr hhv lengde-, flate-, volumenhet

$d\ell, dA, dV$ = hhv lengde-, flate-, volumelement

Hvis uniform massefordeling:

$$dm = \frac{M}{L}d\ell \ (1D) \quad ; \quad dm = \frac{M}{A}dA \ (2D) \quad ; \quad dm = \frac{M}{V}dV \ (3D)$$

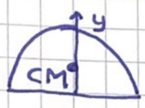
Eks 1: Plastrør ($m = 165\,g$) med lodd i enden ($M = 305\,g$)



$X_{CM} = ?$

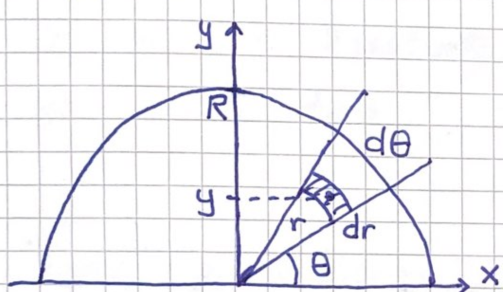
Løsn 1: $X = \frac{1}{m+M}\left\{M\cdot 0 + m\cdot\frac{L}{2}\right\} = \frac{mL}{2(m+M)} = \underline{\underline{0.18L}}$

Eks 2: Halv sirkulær plate



Masse M, radius R. $Y_{CM} = ?$

Løsn 2:



$dA = r\,d\theta\cdot dr$; $A = \frac{1}{2}\pi R^2$

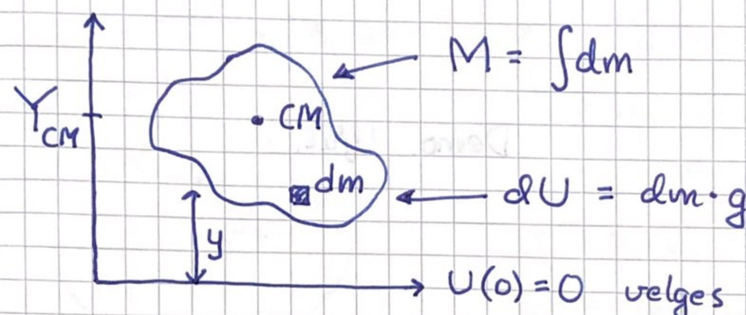
$y = r\sin\theta$

$Y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{1}{A}\int y\,dA$

$$\Rightarrow Y_{CM} = \frac{2}{\pi R^2}\underbrace{\int_0^R\int_0^\pi r\sin\theta\, r\,d\theta\,dr}_{\underbrace{\int_0^R r^2\,dr}_{\frac{1}{3}R^3}\cdot\underbrace{\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta}_{\Big|_0^\pi(-\cos\theta) = 2}} = \frac{4}{3\pi}R \approx \underline{\underline{0.42R}}$$

Oppgaver: Vis at $Y_{CM} = 2R/\pi$ for halv ring og $Y_{CM} = 3R/8$ for halv kompakt kule.

Eks 3 : Potensiell energi i tyngdefeltet. Tyngdepunkt.



Total pot. energi: $U = \int dU = \int g y \, dm = g M Y_{CM}$,
dvs som om all masse M befant seg i høyde Y_{CM}.

Og når g er konstant, er CM og tyngdepunktet på samme sted.

Tyngdepunktbevegelsen [OS1 9.6]

Anta N punktmasser $\{m_i\}$ i pos. $\{\vec{r}_i\}$

N2 for m_i : $\quad m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$

$\vec{F}_{i,ytre}$: ytre kraft på m_i

$\vec{F}_{ji}$: kraft fra m_j på m_i

Legger sammen N2 for alle m i systemet.

VS: $\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} M \vec{R}_{CM} = M \ddot{\vec{R}}_{CM}$

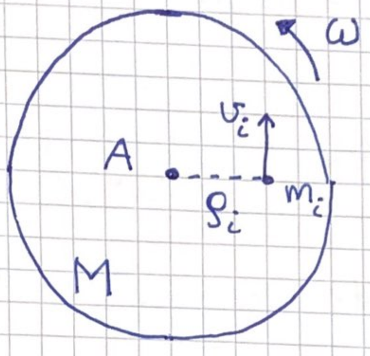
HS: $\underbrace{\sum_i \vec{F}_{i,ytre}}_{= \vec{F}_{ytre}} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{= 0 \text{ pga N3}} = \vec{F}_{ytre}$

$= \vec{F}_{ytre}$ = netto ytre kraft på systemet

$$\Rightarrow \boxed{M \ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}}$$

Dvs, CM beveger seg som om hele M befinner seg i CM og påvirkes av netto ytre kraft på systemet!

Rotasjonsenergi. Treghetsmoment [OS1 10.4, 10.5]



$M = \sum_i m_i$ = legemets masse
A = rotasjonsaksen (⊥ papirplanet)
ρ_i = avstand fra A til m_i
$v_i = \rho_i \omega$ = farten til m_i
ω = legemets vinkelfart

Legemets rotasjonsenergi:

$$K_{rot} = \sum_i K_i = \frac{1}{2}\left\{\sum_i m_i \rho_i^2\right\}\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Legemets treghetsmoment mhp aksen A:

$$I = \sum_i m_i \rho_i^2$$

Med kontinuerlig massefordeling: $I = \int \rho^2 \, dm$

Generell bevegelse for et stivt legeme:
Translasjon av CM med fart $\vec{V}$ kombinert med rotasjon om en akse gjennom CM med vinkelfart ω. Her kan ω uttrykkes som en vektor $\vec{\omega}$, med retning langs rotasjonsaksen.

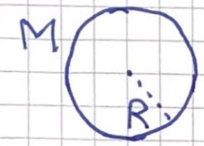
Total kinetisk energi er:

$$\underline{K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2}$$ [Se notat for bevis.]

Her er
M = legemets masse
I_0 = legemets treghetsmoment mhp rotasjonsaksen gjennom CM

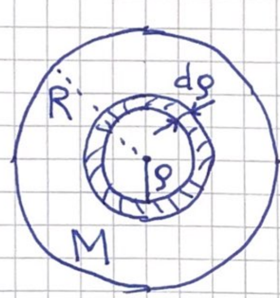
Noen legemer som kan rulle:

1) Ring og hul sylinder



$$I_0 = \int \rho^2 \, dm = R^2 \int dm = \underline{MR^2}$$

2) Kompakt skive og sylinder



Deler skiva i tynne ringer med radius ρ, bredde $d\rho$, areal $dA = 2\pi\rho\, d\rho$, og dermed treghetsmoment

$$dI_0 = \rho^2 dm = \rho^2 \frac{M}{A} dA = \rho^2 \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi\rho\, d\rho$$

Skivas totale treghetsmoment blir dermed

$$I_0 = \int dI_0 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \rho^3 \, d\rho = \underline{\frac{1}{2} MR^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{3) Tynt kuleskall: } I_0 = \frac{2}{3} MR^2 \\ \text{4) Kompakt kule: } I_0 = \frac{2}{5} MR^2 \end{array}\right\} \text{Se øving m/LF.}$$

Alle disse er på formen $I_0 = c \cdot MR^2$

Legeme	Ring	Kuleskall	Skive	Kule
c	1	2/3	1/2	2/5

Lab!