ELEKTROMAGNETISME

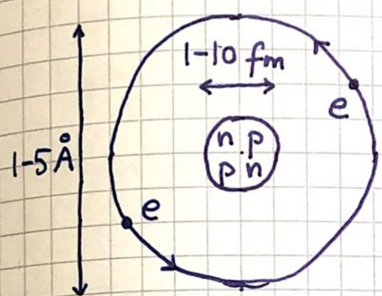
Elektrostatikk [OS2 5-8]

Elektrisk ladning [OS2 5.1]

Materie : atomer. Atom : atomkjerne og ett eller flere elektroner.

Atomkjerne : proton(er) og nøytron(er).

Bohrs klassiske atommodell (1913 ; NP1922) :



Partikkel	Symbol	Masse (kg)	Ladning
elektron	e	$9.11 \cdot 10^{-31}$	$-e$
proton	p	$1.67 \cdot 10^{-27}$	$+e$
nøytron	n	$1.67 \cdot 10^{-27}$	0

[$1\ \text{fm} = 10^{-15}\ \text{m}$; $1\ \text{Å} = 10^{-10}\ \text{m}$ (ångstrøm)]

Ladning er kvantisert i enheter av

$$e = \text{elementærladningen} = 1.602176634 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$$

Symbol for ladning: q, Q. Enhet: $[q] = \text{C}$ (coulomb)

Nøytralt atom, atomnr. Z :

Z protoner, Z elektroner $\Rightarrow Q = Z \cdot e + Z \cdot (-e) = 0$

Ioner : Atomer og molekyler med $Q \neq 0$

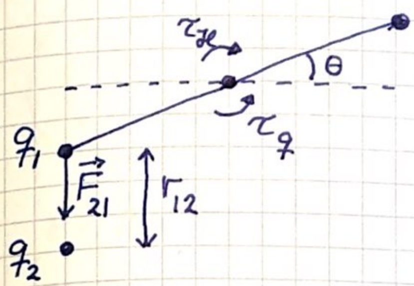
Eks: Li^{+}, Ca^{2+}, F^{-}, CO_3^{2-}, H_3O^{+}

Isotoper av samme grunnstoff har ulikt antall nøytroner

Eks: ^{12}C, ^{13}C, ^{14}C har hhv 6, 7, 8 nøytroner ($Z = 6$)

Coulombs lov [OS2 5.3]

Coulomb, 1785:



Torsjonspendel, sett ovenfra

Likevekt når $\tau_q = \tau_{\mathcal{H}}$

$\tau_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}\,\theta$

$\tau_q = F_{21} \cdot \frac{1}{2} L \cdot \cos\theta$

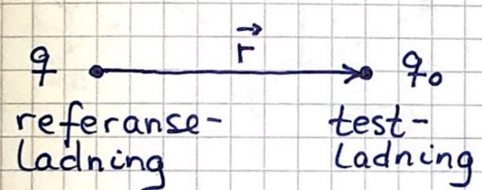
Exp. gav $F_{21} \sim q_1 q_2 / r_{12}^2$; tiltrekning mellom ulike typer ladning, frastøtning mellom like typer ladning:

$\Rightarrow$ Coulombs lov: $\boxed{\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{21}}$

$\varepsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2$ = vakuumpermittiviteten

$\Rightarrow 1/4\pi\varepsilon_0 \approx 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$

Elektrisk felt [OS2 5.4–5.5]



Kraft fra q på q_0:

$$\vec{F} = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}$$

elektrisk felt $\stackrel{def}{=}$ el. kraft pr ladningsenhet

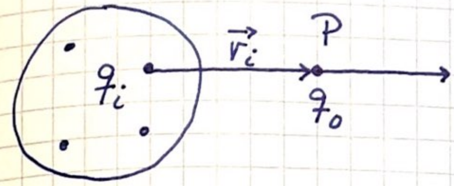
$\vec{E} = \vec{F}/q_0$; $[E] = N/C$

$\Rightarrow$ Punktladning q omgir seg med et el. felt

$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}$; bort fra $q > 0$ $\oplus \longrightarrow \vec{E}$

inn mot $q < 0$ $\ominus \longleftarrow \vec{E}$

El. felt fra flere Ladninger :

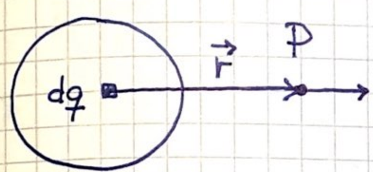


$$\vec{F}_i = q_i q_0 \hat{r}_i / 4\pi\varepsilon_0 r_i^2$$

$$\vec{E}_i = \vec{F}_i / q_0 = q_i \hat{r}_i / 4\pi\varepsilon_0 r_i^2$$

El. felt i pos. P fra $\{q_1 q_2 \cdots\}$: $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{q_i \hat{r}_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}$

El. felt fra kontinuerlig ladningsfordeling : $q_i \to dq$; $\sum_i \to \int$

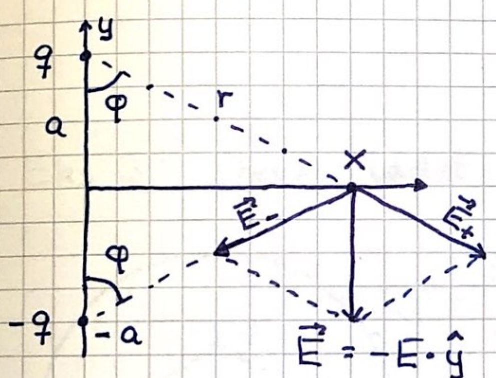


$$d\vec{E} = dq\, \hat{r} / 4\pi\varepsilon_0 r^2$$

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{dq\, \hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Eks 1 : Elektrisk dipol

Punktladninger $\pm q$ i $y = \pm a$. Bestem $\vec{E}$ på x-aksen.



$$E = 2E_+ \cos\varphi \qquad (E_- = E_+)$$

$$\cos\varphi = a/r = a/\sqrt{x^2+a^2}$$

$$E_+ = q/4\pi\varepsilon_0 r^2$$

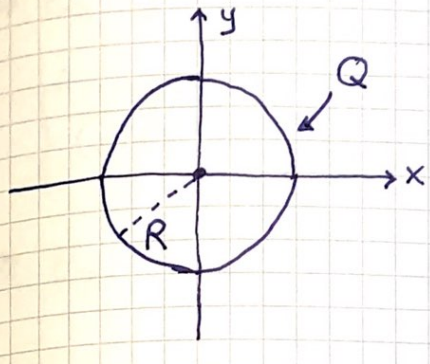
$$\Rightarrow \vec{E} = -\hat{y}\, \frac{2qa}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+a^2)^{3/2}}$$

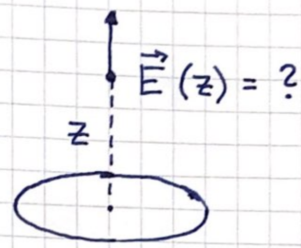
Langt unna dipolen, dvs $x \approx r \gg a$:

$$\vec{E} \approx -\hat{y}\, \frac{2qa}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \quad ; \quad \text{dvs} \quad E(r) \sim 1/r^3$$

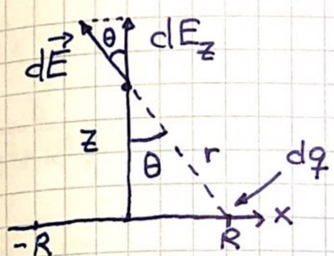
$\vec{E}_+$ og $\vec{E}_-$ kansellerer delvis, slik at $E(r)$ går raskere mot null enn $E(r) \sim 1/r^2$ fra en punktladning.

Eks 2: Jevnt ladet ring; $\vec{E}$ på symmetriaksen





Pga symmetri:
$\vec{E} = E_z \hat{z}$



Bidrag til E_z fra dq:

$dE_z = dE \cdot \cos\theta$

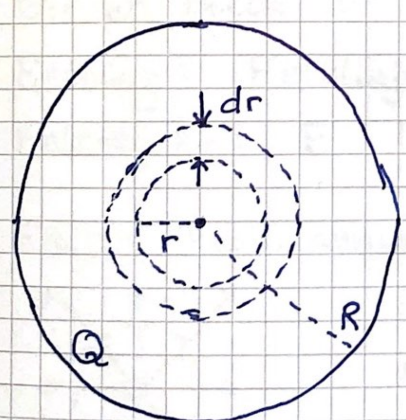
$dE = dq / 4\pi\varepsilon_0 r^2$; $\cos\theta = \frac{z}{r}$; $r^2 = z^2 + R^2$

$$\Rightarrow E_z = \int dE_z = \frac{z}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\int dq = \underline{\frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+R^2)^{3/2}}}$$

Er svaret rimelig? Ja: $E_z(0) = 0$; $E_z(-z) = -E_z(z)$;

$$E_z(z \gg R) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$$

Eks 3: Jevnt ladet skive; $\vec{E}$ på symmetriaksen (= z-aksen)



Skiva betraktes som mange tynne ringer, med radius r, bredde dr, areal $dA = 2\pi r\, dr$, og ladning $dq = Q \cdot dA/A = Q \cdot 2\pi r\, dr / \pi R^2$, og dermed bidrag

$dE_z = dq \cdot z / 4\pi\varepsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}$

til feltet $\vec{E} = E_z \hat{z}$ på z-aksen.

$$\Rightarrow E_z = \int dE_z = \frac{Qz}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\int_0^R \frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \Big|_0^R \left(-\frac{1}{(r^2+z^2)^{1/2}}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left[1 - \frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}}\right]$$

Er svaret rimelig? Ja, dersom $z \gg R$ har vi

$$\frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}} = \left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}$$

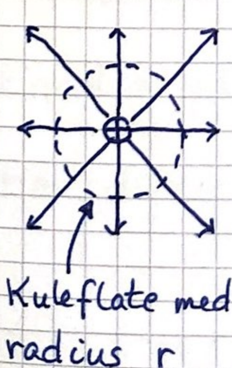
$$\Rightarrow E_z \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2},$$ dvs som med punktladning Q i origo; OK.

Dersom $R \gg z$: $E_z \approx \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, der $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$ er skivas ladning pr flateenhet. Dvs, feltet er tilnærmet <u>konstant</u> i nærheten av ei jevnt ladet skive!

Feltlinjer for $\vec{E}$ [OS2 5.6]

Gir et bilde av $\vec{E}$ i et område omkring ladningene.
Retning: Feltlinjene $\parallel \vec{E}$
Feltstyrke: $E = |\vec{E}|$ prop. med antall feltlinjer pr flateenhet.

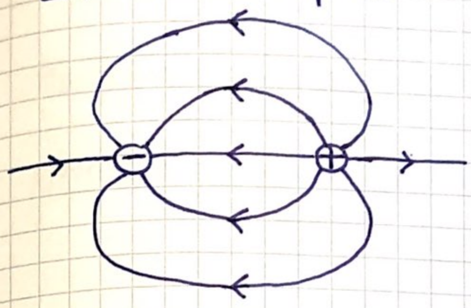
Eks 1: Punktladning



Feltlinjer pr flateenhet i avstand r:
$N/A = N/4\pi r^2 \sim 1/r^2$
Feltstyrke i avstand r:
$E = q/4\pi\varepsilon_0 r^2 \sim 1/r^2$

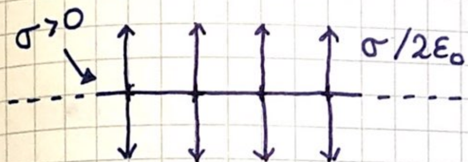
$\Rightarrow E$ prop. med N/A, OK.

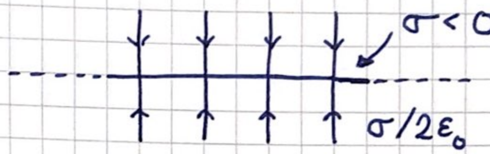
Eks 2: Dipol

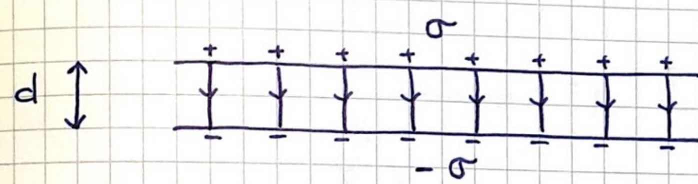


Vi ser at feltlinjer starter på positive ladninger og ender på negative ladninger.

Eks 3: Jevnt ladet plate og parallellplatekondensator







$\pm\sigma = \pm Q/A$

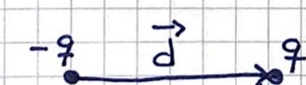
Dersom $d \ll \sqrt{A}$, er $\vec{E}$ (tilnærmet) konstant mellom platene, med feltstyrke

$$E = 2 \cdot \sigma/2\varepsilon_0 = \sigma/\varepsilon_0$$

Utenfor volumet mellom platene er

$$E \approx 0$$

Elektrisk dipolmoment [OS2 5.7]

Enkel dipol: 

Har dipolmoment $\vec{p} = q \cdot \vec{d}$; $[p] = C \cdot m$

Flere punktladninger q_i i pos. $\vec{r}_i$: $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$

Kontinuerlig ladningsfordeling : $\vec{p} = \int \vec{r}\, dq$

Nettoladning for dipol er null : $\sum_i q_i = 0$; $\int dq = 0$

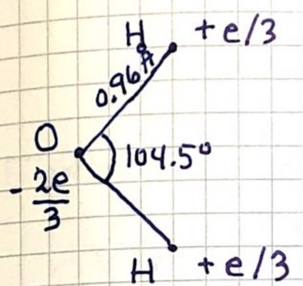
Eks 1 : CO_2

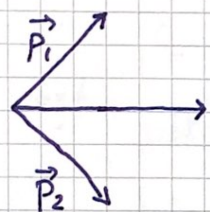
Lineært :

$$\overset{-}{O} = \overset{++}{C} = \overset{-}{O} \qquad \xrightarrow{\vec{p}_1} \; \xleftarrow{\vec{p}_2}$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$$

Eks 2 : H_2O





$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$; $p = 2 \cdot \frac{e}{3} \cdot 0.96\,\text{Å} \cdot \cos 52.25°$

$= \underline{6.3 \cdot 10^{-30}\ Cm}$

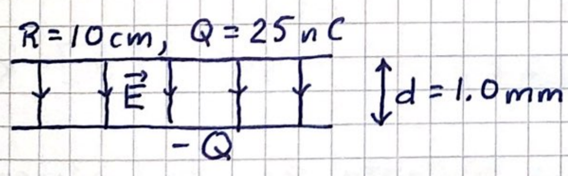
$= \underline{0.39\ e\text{Å}}$

$= \underline{1.89\ D}$

Enheten debye :

$1D = 10^{-21}\ Cm / 299792458 \approx 3.336 \cdot 10^{-30}\ Cm \approx 0.208\ e\text{Å}$

Eks 3 : Platekondensator



Bestem $\sigma = Q/A$, E og p

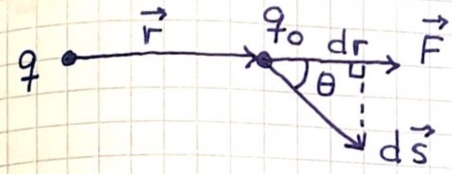
$\sigma = 25 \cdot 10^{-9}\ C / \pi (0.10\text{m})^2 = \underline{8.0 \cdot 10^{-7}\ C/m^2}$

$E = \sigma / \varepsilon_0 = \underline{9.0 \cdot 10^{4}\ N/C}$

$p = Q \cdot d = \underline{2.5 \cdot 10^{-11}\ C \cdot m}$

Potensiell energi og elektrisk potensial [OS2 7.1-7.2]

Pot. energi for ladningspar :



$$dU = -\vec{F}\cdot d\vec{s} = -F\cdot ds\cdot\cos\theta$$
$$= -F\cdot dr = -qq_0\, dr/4\pi\varepsilon_0 r^2$$

= endringen i pot. energi når avstanden mellom q og q_0 endres fra r til $r+dr$

Naturlig valg: $U(r\to\infty)=0$

$$\Rightarrow U(r) = -\int_\infty^r \frac{qq_0\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$$ = pot. energi for ladningspar q og q_0 i innbyrdes avstand r

Elektrisk potensial $\overset{\text{def}}{=}$ pot. energi pr ladningsenhet

$$V(r) = \frac{U(r)}{q_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$ = potensialet som q omgir seg med = Coulombpotensialet

Potensialforskjell mellom to posisjoner f og i :

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_i^f \frac{\vec{F}}{q_0}\cdot d\vec{s} = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

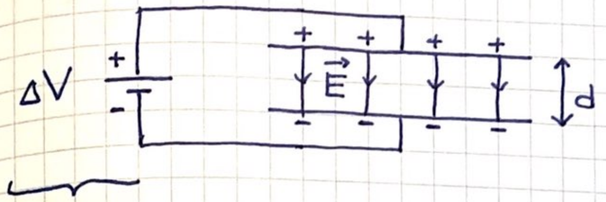
Enhet : $[V] = V$ (volt)

$\Rightarrow [E] = V/m$ (brukes mer enn N/C)

Energienhet på atomært nivå :

$$1\ \text{eV (elektronvolt)} = 1.6\cdot 10^{-19}\ C\cdot 1\ J/C$$
$$= 1.6\cdot 10^{-19}\ J$$

Eks 1: Platekondensator



Likespenningskilde

$R = 10\,cm$, $d = 1.0\,mm$

$\Delta V = 30\,V$

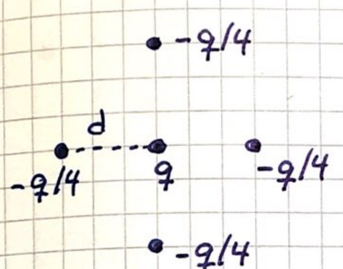
Bestem E og $\pm Q$.

$$\Delta V = V_+ - V_- = -\int_-^+ \vec{E}\cdot d\vec{s} = E\cdot d \Rightarrow E = \frac{30\,V}{0.001\,m} = \underline{30\,kV/m}$$

$$E = \sigma/\varepsilon_0 \Rightarrow Q = \sigma A = \varepsilon_0 E \cdot \pi R^2 = \underline{8.3\,nC}$$

$\vec{E}$ har retning fra ⊕ mot ⊖, og fra høyt mot lavt potensial.

Eks 2: Pot. energi for flere punktladninger



Hvert unike ladningspar bidrar med

$$U_{ij} = q_i q_j / 4\pi\varepsilon_0 r_{ij}$$

til total pot. energi U.

Anta $q = e$ og $d = 2.0\,Å$ og bestem U.
(XeF_4)

Løsn 2: Antall unike ladn. par med N punktladn. er

$$\binom{N}{2} = \frac{N!}{2!\,(N-2)!} = \frac{1}{2} N (N-1)$$

Her: $N = 5 \Rightarrow 10$ ladn. par: $e, -e/4$ i avstand d (4 stk); $-e/4, -e/4$ i avstand $\sqrt{2}\,d$ (4 stk); $-e/4, -e/4$ i avst. $2d$ (2 stk)

Dermed:

$$U = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 d}\left\{4\cdot\frac{(-1/4)}{1} + 4\cdot\frac{(-1/4)^2}{\sqrt{2}} + 2\cdot\frac{(-1/4)^2}{2}\right\}$$

$$= 9\cdot 10^9 \cdot \frac{(1.6\cdot 10^{-19})^2}{2.0\cdot 10^{-10}} \cdot (-0.76)\ J$$

$$= -8.76\cdot 10^{-19}\ J$$

$$= \underline{-5.5\ eV}$$

Beregning av $\vec{E}$ fra V [OS2 7.4]

$\vec{F} = -\nabla U \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\nabla V}$ siden $\vec{F} = q_0 \vec{E}$ og $U = q_0 V$

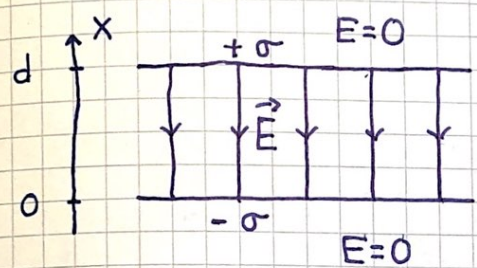
1D : $V = V(x) \Rightarrow \nabla V = \hat{x}\, dV/dx$

Kulesymmetri : $V = V(r) \Rightarrow \nabla V = \hat{r}\, dV/dr$

Eks 1 : Punktladning

$V(r) = q/4\pi\varepsilon_0 r \Rightarrow \vec{E} = -\hat{r}\, dV/dr = \hat{r}\, q/4\pi\varepsilon_0 r^2$, OK

Eks 2 : Platekondensator



Anta $V = 0$ på negativ plate og bestem $V(x)$.

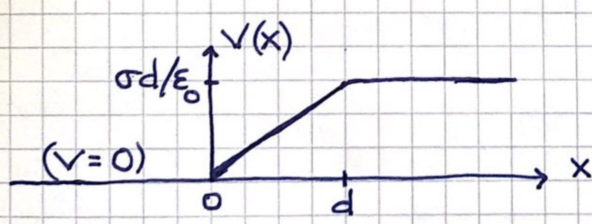
Løsn 2:

Fra før : $\vec{E}(x) = -\hat{x}\,\sigma/\varepsilon_0$ mellom platene; $E = 0$ utenfor

$\Rightarrow V(x) = \sigma x/\varepsilon_0 + V(0) = \sigma x/\varepsilon_0$ mellom platene

$V(x) = 0$ for $x \leq 0$

$V(x) = \sigma d/\varepsilon_0$ for $x \geq d$



Ekvipotensialer [OS2 7.5]

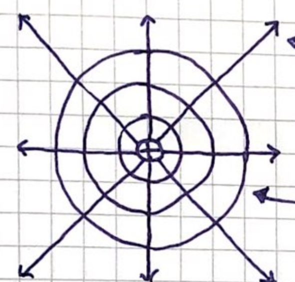
Et ekvipotensial er et område der V er konstant.
Kan være linje, flate eller volum.

Hvis $d\vec{s}$ forbinder to pos. på en ekvipotensialflate, er V like stor i de to posisjonene. Da er $dV = 0$, dvs

$$-\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Da må $\vec{E} \perp d\vec{s}$, dvs $\vec{E}$ står normalt på ekvipotensialflatene.

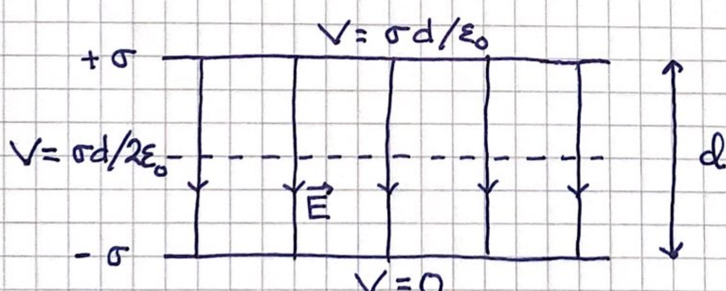
Eks 1: Punktladning



radielt rettede feltlinjer for $\vec{E}$

ekvipotensialflatene er kuleskall

Eks 2: Platekondensator



Uniformt felt $\vec{E}$ gir plan $\perp$ $\vec{E}$ med konst. potensial