

TFY4104/TFY4125 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til Test 6.

Oppgave 1

Med all masse på akse blir treghetsmomentet mhp akse null. Riktig svar: A.

Oppgave 2

Med to stk punktmasser $16u$ i avstand $1.16 \text{ \AA}$ fra akse blir treghetsmomentet $I_x = 2 \cdot 16u \cdot 1.16^2 \text{ \AA}^2 = 43.1 u\text{\AA}^2$. Riktig svar: D.

Oppgave 3

Det ene oksygenatomet ligger på akse, de to andre er i avstand $1.28 \text{ \AA} \cdot \sin 58.4^\circ = 1.09 \text{ \AA}$ fra akse. Da blir $I_x = 2 \cdot 16u \cdot 1.09^2 \text{ \AA}^2 = 38.0 u\text{\AA}^2$. Riktig svar: C.

Oppgave 4

Tipset gikk i retning av å dele plata inn i små biter med sidekanter dx og dy og masse $dm = M dx dy / L^2$, i posisjon (x, y) , slik at bitens kvadrerte avstand til akse er $\rho^2 = x^2 + y^2$. Integralet over x og y fra $-L/2$ til $L/2$, slik at vi får med hele plata, gir det vi er ute etter:

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} (x^2 + y^2) dx dy M / L^2 \\ &= (M/L) \cdot (1/3) \cdot (L/2)^3 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= \frac{1}{6} ML^2 \end{aligned}$$

(Ved integrasjon av x^2 gir integralet over y bare en faktor L , mens $x^3/3$ innsatt øvre og nedre grense gir $2L^3/24$. Tilsvarende for y^2 , med ombytte av x og y .) Riktig svar: C.

Oppgave 5

Tipset baserer seg på at plata ligger i xy -planet, med CM i origo, og med akse langs x -akse. Da kan vi dele opp plata i tynne staver parallelle med x -aksen, med bredde dy , lengde L , masse $dm = ML dy / L^2 = dy M / L$, og i avstand kvadrert lik $\rho^2 = y^2$ fra akse. Da blir

$$I = \int \rho^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} y^2 dy M / L = \frac{1}{12} ML^2.$$

Alternativt kunne vi ha delt plata inn i tynne staver parallelle med y -aksen, med bredde dx , lengde L , masse $dm = dx M / L$, og treghetsmoment $dI = dm L^2 / 12$, kjent fra forelesningene. Da blir

$$I = \int dI = \int_{-L/2}^{L/2} dx \cdot ML / 12 = \frac{1}{12} ML^2.$$

Samme svar, selvsagt. Riktig svar: A.

Oppgave 6

La oss følge tipsene i oppgaven. Trekanten i kvadranten $(x, y) = (+, +)$ har da treghetsmoment mhp x -akse lik

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^{L/\sqrt{2}} y^2 M dy (L/\sqrt{2} - y) / L^2 \\ &= (M/L^2) \Big|_0^{L/\sqrt{2}} \left(\frac{Ly^3}{3\sqrt{2}} - \frac{y^4}{4} \right) \\ &= ML^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{16} \right) \\ &= \frac{1}{48} ML^2. \end{aligned}$$

Dermed $ML^2/12$ for hele plata, siden de fire trekantene bidrar like mye til totalt treghetsmoment. I likhet med forrige oppgave kan tynne staver legges andre veien, på tvers av x -aksen. Riktig svar: A.

Oppgave 7

N2 for rotasjon om aksen gjennom CM: $\tau = \Delta L / \Delta t$, med dreiemoment $\tau = FR$. Her er videre $\Delta L = L_s = I_0 \omega$. Dermed:

$$\omega = \frac{L_s}{I_0} = \frac{\tau \Delta t}{MR^2} = \frac{F \Delta t}{MR} = \frac{45 \cdot 0.5}{5 \cdot 0.3} = 15 \text{ radianer/sekund.}$$

Riktig svar: C.

Oppgave 8

N2 for rotasjon om akse gjennom CM:

$$fR = \tau = I_0 \alpha = MR^2 A / R = MRA \Rightarrow f = MA = 0.1 \cdot 0.6 = 0.06 \text{ N.}$$

Riktig svar: A.

Oppgave 9

N2 nedover langs skråplanet: $Mg \sin \beta - f = MA$, der β er helningsvinkelen. Dermed:

$$\beta = \arcsin \frac{f + MA}{Mg} = \arcsin \frac{2MA}{Mg} = \arcsin \frac{1.2}{9.8} \simeq 7^\circ.$$

Riktig svar: A.

Oppgave 10

Kassa begynner å gli hvis tyngdens komponent langs skråplanet, $Mg \sin \beta$ overstiger maksimal statisk friksjonskraft $\mu_s N = \mu_s Mg \cos \beta$, der β er helningsvinkelen; dvs når $\beta = \arctan \mu_s$, som her er ca 52 grader. Men her vil det for $\beta > 45$ grader bli et netto dreiemoment mhp nedre fremre hjørne på kassa, og da vil kassa velte. Riktig svar: D.

Oppgave 11

N2: $Ma = Mg - S$, der S er snordraget. N2, rotasjon om CM: $\tau = SR = I_0 \alpha = I_0 a / R$. Her er α jojoens vinkelakselerasjon. Siste ligning gir $S = I_0 a / R^2$, som innsatt i N2 gir $a = g / (1 + I_0 / MR^2)$. Riktig svar: C.

Oppgave 12

Når stanga har rotert en vinkel ϕ virker tyngdekraften på stanga med et dreiemoment relativt akslingen A lik $\tau = Mg(L/2) \sin \phi$, og i følge N2 for rotasjon om A skal dette være lik $I_A \alpha$, der $I_A = ML^2/3$ (oppgitt) og α er vinkelakselerasjonen, som vi skal bestemme. Dermed, $\alpha = (3g/2L) \sin \phi$. Riktig svar: E.

Oppgave 13

Her bør vi umiddelbart forvente at $a = V^2/R$, dvs sentripetalakselerasjonen: Hjulet beveger seg med konstant hastighet mot høyre, som ikke bidrar til dets akselerasjon, samtidig som det roterer med vinkelhastighet $\omega = V/R$, noe som gir akselerasjon V^2/R , med retning inn mot hjulets sentrum, for alle punkter på periferien. Med rett fram regning:

$$\begin{aligned} v_x &= V - R\omega \cos \omega t, & v_y &= R\omega \sin \omega t \\ a_x &= R\omega^2 \sin \omega t, & a_y &= R\omega^2 \cos \omega t \\ a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\omega^2 = V^2/R. \end{aligned}$$

Riktig svar: A.

Oppgave 14

Konstant hastighet betyr null nettokraft. Dermed $f = 0$. Riktig svar: E.

Oppgave 15

Hastigheten V avtar. Da avtar også vinkelhastigheten $\omega = V/R$. Da må det være et netto ytre dreiemoment mhp en akse gjennom CM konsistent med dette, og det er det bare friksjonskraften som kan klare. Og da må denne virke *oppover* skråplanet. Riktig svar: A.

Oppgave 16

De fire stavenes massesenter har lik akselerasjon når netto ytre kraft $\mathbf{F}$ er den samme. Kraftens angrepspunkt har ingen betydning for tyngdepunktbevegelsen. Riktig svar: B.

Oppgave 17

Kloss og spole bryter mållinjen samtidig, av samme grunn som i forrige delspørsmål. Snordraget har en arm (lik spolens radius) relativt spolens massesenter, så spolen utsettes for et ytre dreiemoment relativt massesenteret. Da gir N2 for rotasjon (spinningsatsen) at spolen får en vinkelakselerasjon, dvs den roterer med økende vinkelhastighet. Riktig svar: C.

Oppgave 18

Langs skråplanet virker tyngdens komponent ($mg \sin \alpha$, der α er helningen på skråplanet) nedover, like stor for alle tre, samt friksjonskraften f_i ($i = 1, 2, 3$) fra underlaget, rettet oppover. Nettokraften $mg \sin \alpha - f_i$ bestemmer tyngdepunktets akselerasjon, som tydeligvis har vært størst for legeme 3, og like stor for 1 og 2. Ergo er f_3 mindre enn $f_1 = f_2$. Riktig svar: A.

Oppgave 19

Den største massen må nødvendigvis vinne nappetaket her, og m_1 vil derfor akselereres nedover, m_2 oppover: Rotasjon mot klokka. Snordraget S_1 må være større enn S_2 siden det er snorene som skal få sving på trinsa med treghetsmomentet $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$. Riktig svar: C.

Oppgave 20

Når snora ikke glir på hjulet har vi "rullebetingelsen" $\omega = v/R$. Riktig svar: B.

Oppgave 21

Skiva har indre dreieimpuls (spinn) mhp CM $L_{\text{hjul}} = I_0\omega = (MR^2/2)v/R = MRv/2$. De to loddene har banedreieimpuls mhp CM hhv $L_1 = m_1Rv$ og $L_2 = m_2Rv$. Alle bidrar med samme fortegn, dvs som vektorer $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ peker alle tre ut av planet. Dermed: $L = MRv/2 + m_1Rv + m_2Rv = (M/2 + m_1 + m_2)Rv$. Riktig svar: A.

Oppgave 22

Uten friksjon mellom snor og hjul blir snordraget S likt i hele snora. N2 gir da $m_1g - S = m_1a$ og $S - m_2g = m_2a$, med positiv retning nedover for m_1 og oppover for m_2 (siden vi vet hvilken vei de to vil bevege seg). Addisjon av disse to eliminerer S og gir $(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a$, dvs $a = g(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2) = g(1 - b)/(1 + b)$. Riktig svar: E.

Oppgave 23

For harmonisk svingning, $x(t) = x_0 \sin \omega t$, er akselerasjonen $a(t) = -\omega^2 x_0 \sin \omega t = -\omega^2 x(t)$ i motfase med posisjonen x . Dette stemmer med graf nr 2. Riktig svar: B.

Oppgave 24

For harmonisk svingning, $x(t) = x_0 \sin \omega t$, er akselerasjonen $a(t) = -\omega^2 x(t)$, slik at $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{40} = \pi/\sqrt{10} \simeq 1$ s. Riktig svar: A.

Oppgave 25

Total mekanisk energi er $kA^2/2$ for en enkel harmonisk oscillator med amplitude A og fjærkonstant k . Potensiell energi er $kx^2/2$, slik at med $x = A/2$ utgjør potensiell energi 1/4 av total energi. Riktig svar: C.

Oppgave 26

Energibevarelse gir $mv^2/2 = kx_2^2/2$, dvs $v = |x_2|\sqrt{k/m} = 0.05 \cdot \sqrt{500/2.5} = 0.05 \cdot 10\sqrt{2} \simeq 0.71$ m/s. Riktig svar: A.

Oppgave 27

Newtons 2. lov for rotasjon om fast akse,

$$\tau = \dot{L} = I\dot{\omega} = I\ddot{\theta},$$

med dreiemoment $\tau = -D\theta$ gir ligningen

$$-D\theta = I\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{D}{I}\theta = 0.$$

Dette er en harmonisk oscillator med vinkelfrekvens $\omega_0 = \sqrt{D/I}$, og dermed svingetid $T = 2\pi\sqrt{I/D}$. Riktig svar: A.

Oppgave 28

Steiners sats gir at kulas treghetsmoment mhp en akse gjennom festepunktet er

$$I = I_0 + Md^2 = \frac{2}{5}MR^2 + M(3R/2)^2 = \frac{53}{20}MR^2.$$

Svingetiden blir dermed

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{53R}{30g}},$$

som med $R = 0.05$ m og $g = 9.81$ m/s² gir $T = 0.6$ s. Riktig svar: C.

Oppgave 29

Steiners sats gir at kulas treghetsmoment mhp en akse gjennom festepunktet er

$$I = I_0 + Md^2 = \frac{2}{3}MR^2 + M(2R)^2 = \frac{14}{3}MR^2.$$

Svingetiden blir dermed

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{7R}{3g}}.$$

Riktig svar: D.

Oppgave 30

Newtons 2. lov gir her ligningen

$$-kx - b\dot{x} = m\ddot{x},$$

som f.eks kan skrives

$$m\ddot{x} + kx = -b\dot{x}.$$

Vi regner så ut dE/dt (med bruk av kjerneregelen for derivasjon):

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx).$$

Her kan de to leddene i parentes erstattes av $-b\dot{x}$, slik at $|dE/dt| = b\dot{x}^2$. Riktig svar: E.

Oppgave 31

Nei, det er nok ikke bare å stille seg oppå ei fjærvekt og lese av tyngden, og dermed massen, når det ikke lenger er noen tyngdekraft til stede! Men med en enkel harmonisk oscillator går det fint. Stolen har, med $m_0 = 42 \text{ kg}$ og $T_0 = 0.79 \text{ s}$, fjærkonstant

$$k = \frac{4\pi^2 m_0}{T_0^2} = 2657 \text{ N/m}.$$

Stol pluss astronaut har dermed, med $T_1 = 1.36 \text{ s}$, masse

$$m_1 = \frac{kT_1^2}{4\pi^2} = 124 \text{ kg}.$$

Astronautens masse er da 82 kg. Riktig svar: C.

Oppgave 32

Fjærkraften kA må overstige maksimal friksjonskraft $\mu_s N = \mu_s mg$, dvs $A > \mu_s mg/k$. Riktig svar: A.

Oppgave 33

Med svak damping er $1/\tau \ll \omega$, slik at vi kan skrive $x(t) \simeq A \cos(\omega t + \phi)$ i starten. Dermed er

$$\ddot{x}(t) \simeq -\omega^2 x(t) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x(t)$$

i starten. Fra figuren ser vi at $T \simeq 4 \text{ s}$ og $x(0) = 0.6 \text{ m}$. Dette gir en akselerasjon ca - 1.5 m/s² i starten. Riktig svar: B.

Oppgave 34

På to hele perioder, fra 1. til 3. topp, reduseres amplituden fra ca 0.92 m til ca 0.42 m. Dermed:

$$\frac{x(t+2T)}{x(t)} = e^{-2T/\tau} = \frac{0.42}{0.92},$$

som gir (med $T = 4 \text{ s}$)

$$\tau \simeq \frac{2T}{\ln(0.92/0.42)} \simeq 10 \text{ s}.$$

Riktig svar: B.

Oppgave 35

Den kinetiske energien til en harmonisk oscillator svinger med dobbelt så stor frekvens og dermed halvparten så stor periode som utsvinget. Derfor er B ikke riktig. Riktig svar: B.