

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Våren 2016.
Løsningsforslag til øving 12.

1) Med isoterme forhold og ideell gass blir bulkmodulen

$$B = -V(\partial p / \partial V)_T = -V(\partial(Nk_B T / V) / \partial V)_T = Nk_B T / V,$$

slik at $v = \sqrt{(Nk_B T / V) / (mN / V)} = \sqrt{k_B T / m}$. Riktig svar: B.

2) Med adiabatisk forhold og ideell gass er pV^γ konstant, dvs vi kan skrive $p(V) = AV^{-\gamma}$. Bulkmodulen blir da

$$B = -V \cdot A \cdot (-\gamma) V^{-\gamma-1} = \gamma p,$$

og siden $p = Nk_B T / V$, har vi $v = \sqrt{\gamma k_B T / m}$. Riktig svar: A.

3) Molar masse 29 gram gir molekylmasse $m = 0.029 / 6.022 \cdot 10^{23} \text{ kg} = 4.82 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$. Med $T = 293 \text{ K}$ gir dette $v = 290 \text{ m/s}$. Riktig svar: A.

4) Luft er nesten utelukkende en toatomig gass, slik at $\gamma \simeq 1.4$. Dette gir $v = 343 \text{ m/s}$. Riktig svar: D.

5) I en ideell gass er det ingen vekselvirkning mellom molekylene, slik at indre energi U er lik molekylens kinetiske energi K . Toatomige molekyler har 5 kvadratiske ledd i energifunksjonen: $K = (m/2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + (I_0/2)(\omega_x^2 + \omega_y^2)$ (når vi velger z -aksen langs molekylets akse; null treghetsmoment med hensyn på rotasjon omkring molekylets akse for lineære molekyler; intet bidrag fra kinetisk vibrasjonsenergi, da tilgjengelig termisk energi ved normale temperaturer er for liten til å eksitere vibrasjonsbevegelse i toatomige molekyler (utover laveste vibrasjonsenergitilstand, den såkalte grunntilstanden)). Ekvipartisjonsprinsippet sier at hvert kvadratiske ledd i energifunksjonen gir et bidrag $k_B T / 2$ til indre energi U pr molekyl når systemets temperatur er T . Dermed er $U(T) = 5Nk_B T / 2$ for en ideell toatomig gass. Da er $C_V = (dQ/dT)_V = (dU/dT)_V$ (siden $dW = p dV = 0$ når eksperimentet foretas ved konstant volum), dvs $C_V = 5Nk_B / 2$. Hvis eksperimentet foretas ved konstant trykk, er $C_p = (dQ/dT)_p = (dU/dT)_p + p(dV/dT)_p = 5Nk_B / 2 + p \cdot Nk_B / p = 7Nk_B / 2$. Riktig svar: C.

6) Arbeid utført pr syklus er gitt ved arealet som omslutes av kurven $p(V)$. Her blir da $W = (5p_0 - p_0) \cdot (4V_0 - V_0) = 12p_0 V_0$. Riktig svar: C.

7) La oss nummerere de fire hjørnene av den rektangulære $p(V)$ -kurven fra 1 til 4, med klokka, og med tilstand 1 oppe til venstre, dvs $p_1 = 5p_0$ og $V_1 = V_0$. Ideell gass tilstandsligning gir da $T_1 = p_1 V_1 / Nk_B = 5p_0 V_0 / Nk_B$, $T_2 = p_2 V_2 / Nk_B = 20p_0 V_0 / Nk_B$, $T_3 = p_3 V_3 / Nk_B = 4p_0 V_0 / Nk_B$, og $T_4 = p_4 V_4 / Nk_B = p_0 V_0 / Nk_B$. I stigende rekkefølge, og i enheten $p_0 V_0 / Nk_B$ blir dette $T_4 = 1$, $T_3 = 4$, $T_1 = 5$ og $T_2 = 20$. Riktig svar: D.

8) Varme som overføres fra omgivelsene til gassen er $C_p \Delta T$ for de to isobare delprosessene (12 og 34), og $C_V \Delta T$ for de to isokore delprosessene (23 og 41). Siden temperaturen i gassen avtar fra tilstand 2 til tilstand 3, og fra tilstand 3 til tilstand 4, er dette delprosesser der varme *avgis* fra gassen til omgivelsene. Dette er ikke varme som vi må betale for, og skal dermed ikke regnes med når virkningsgraden skal beregnes. I den isobare utvidelsen fra 1 til 2 og i den isobare trykkøkningen fra 4 til 1, derimot, øker temperaturen i gassen. Dette gir positiv varmeoverføring fra omgivelsene til gassen, slik at Q_{12} og Q_{41} skal regnes med ved beregning av η . Her blir $Q_{12} = (7Nk_B / 2) \cdot (T_2 - T_1) = 105p_0 V_0 / 2$ og $Q_{41} = (5Nk_B / 2) \cdot (T_1 - T_4) = 10p_0 V_0$. I alt blir $Q_{\text{inn}} = 125p_0 V_0 / 2$, slik at virkningsgraden er

$$\eta = W / Q_{\text{inn}} = 12 / (125 / 2) = 24 / 125 \simeq 0.19.$$

Riktig svar: A.

Kommentar: En Carnot-prosess med isotermer ved høyeste (T_2) og laveste (T_4) temperatur i den aktuelle

prosessen ville hatt virkningsgrad $\eta_C = 1 - T_4/T_2 = 1 - 1/20 = 0.95$. Dette er en øvre teoretisk grense, og vi ser at vår kretsprosess har virkningsgrad (0.19) betydelig mindre enn dette.

9) Isobar utvidelse fra a til b betyr at $T_a < T_b$. Isoterm utvidelse fra b til c betyr at $T_b = T_c$. Adiabatisk kompresjon fra d til a betyr at $T_d < T_a$ (siden en adiabat er brattere enn en isoterm i et pV -diagram). Dermed er $T_d < T_a < T_b = T_c$. Riktig svar: B.

10) Isobar kompresjon fra a til b betyr at $T_a > T_b$. Isoterm utvidelse fra b til c betyr at $T_b = T_c$. Adiabatisk kompresjon fra d til a betyr at $T_d < T_a$ (siden en adiabat er brattere enn en isoterm i et pV -diagram). Dermed er $T_b = T_c < T_d < T_a$. Riktig svar: D.

11) En Carnot-varmepumpe har effektfaktor

$$\varepsilon_V^C = |Q_2/W| = |Q_2/(Q_2 + Q_1)| = |1/(1 + Q_1/Q_2)| = |1/(1 - T_1/T_2)| = T_2/(T_2 - T_1).$$

Her er T_2 temperaturen til det varme reservoaret, dvs inne i stua, og T_1 er temperaturen til det kalde reservoaret, dvs ute. Din venn hevder at han oppnår $Q_2 = 10$ kW med $W = 1$ kW når $T_1 = 253$ K. Dette høres veldig mye ut: Hvis vi går ut fra at din venn i hvert fall har 15 varmegrader inne i stua, dvs minst $T_2 = 288$ K, vil en Carnot-varmepumpe ikke kunne levere mer enn $Q_2 = W \cdot T_2/(T_2 - T_1) = 1 \cdot 288/35 = 8.2$ kW. Mer enn dette vil det ikke være mulig å få ut av en reell varmepumpe, og i praksis vil nok effektfaktoren være en god del mindre enn som så. Men du kan trygt gratulere din venn med en god investering – en god varmepumpe kan gi god fyringsøkonomi i dag. Du kan tillate deg alternativ C, eventuelt alternativ B, hvis du ikke er av den snakkesalige typen. Men A og D vil ikke se bra ut.

12) En Carnot-kjølemaskin har effektfaktor

$$\varepsilon_K^C = |Q_1/W| = |Q_1/(Q_1 + Q_2)| = |1/(1 + Q_2/Q_1)| = |1/(1 - T_2/T_1)| = T_1/(T_2 - T_1).$$

Dermed: $W = Q_1 \cdot (T_2 - T_1)/T_1 = 500 \cdot 33/255 = 65$ W. Riktig svar: B.