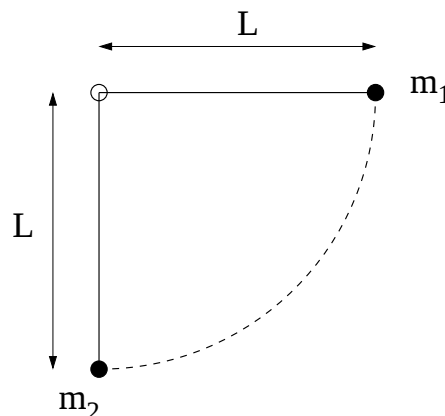


Oppgave 1: Kulekollisjoner

To kuler med masse m_1 og m_2 er hengt opp i samme punkt med tynne, vektløse snorer med lengde L . Kula med masse m_1 trekkes ut til snora er horisontal og slippes. Den svinger nedover og treffer kula med masse m_2 i et sentralt støt. Betrakt kulene som punktmasser slik at snorene er vertikale når kollisjonen skjer.



a) Hva er hastigheten v_1 til massen m_1 like før støtet?

- A) $\sqrt{gL/2}$ B) $\sqrt{gL}$ C) $\sqrt{2gL}$ D) $\sqrt{3gL}$ E) $\sqrt{4gL}$

b) Hva er strekket S_1 i snora som m_1 henger i like før støtet?

- A) m_1g B) $2m_1g$ C) $3m_1g$ D) $4m_1g$ E) $5m_1g$

c) Anta at kulene er klebrige og henger sammen etter kollisjonen, dvs kollisjonen er fullstendig uelastisk. Hvor høyt kommer kulene da etter kollisjonen?

- A) L B) $L \cdot (m_1/m_2)$ C) $L \cdot (m_1/(m_1 + m_2))$ D) $L \cdot (m_2/(m_1 + m_2))$ E) $L \cdot (m_1/(m_1 + m_2))^2$

d) Hva er forholdet mellom mekanisk energi etter og før denne fullstendig uelastiske kollisjonen?

- A) $m_1/(m_1 + m_2)$ B) $m_2/(m_1 + m_2)$ C) $(m_2/(m_1 + m_2))^2$ D) m_1/m_2 E) m_2/m_1

Anta heretter at kollisjonen er elastisk.

e) Hva er hastigheten til kule 2 like etter kollisjonen.

- A) v_1 B) $v_1 \cdot 2m_1/(m_1 + m_2)$ C) $v_1 \cdot m_1/(m_1 + m_2)$ D) $v_1 \cdot 2m_2/(m_1 + m_2)$ E) $v_1 \cdot m_1/m_2$

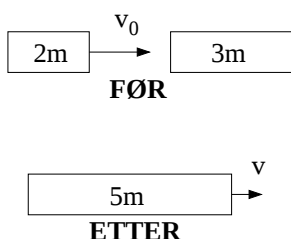
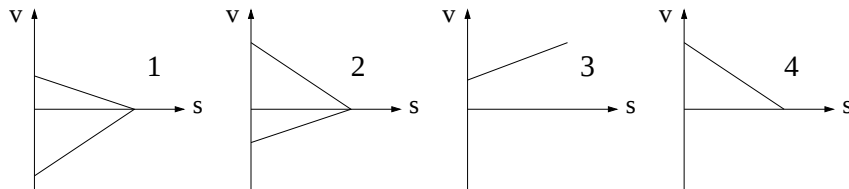
f) Hva må masseforholdet m_1/m_2 minst være for at kule 2 etter støtet skal svinge helt rundt, dvs nå toppunktet med stram snor?

- A) 6 B) 5/3 C) $\sqrt{5}/\sqrt{8}$ D) $\sqrt{8}/(\sqrt{8} - \sqrt{5})$ E) $\sqrt{5}/(\sqrt{8} - \sqrt{5})$

Oppgave 2: Litt ymse

a) En kloss sendes oppover et skråplan. Det er friksjon mellom klossen og underlaget. Hvilken eller hvilke av figurene viser mulig graf for klossens hastighet v ? (s angir klossens posisjon på skråplanet, og v og s er begge positive i retning oppover skråplanet.)

- A) Kun graf 1.
- B) Kun graf 2.
- C) Graf 2 og 4.
- D) Graf 1 og 3.



b) En kloss med masse $2m$ kolliderer fullstendig uelastisk med en kloss med masse $3m$. Før kollisjonen har klossen med masse $2m$ hastighet v_0 mens klossen med masse $3m$ ligger i ro. Etter kollisjonen har klossene felles hastighet v . Hvor mye mekanisk energi har gått tapt i kollisjonen?

- A) $mv_0^2/3$
- B) $2mv_0^2/5$
- C) $3mv_0^2/5$
- D) mv_0^2

Oppgave 3: Saturn V, trinn 1

Rakett-typen som blant annet sørget for å bringe Apollo 11 fra jorda til månen i juli 1969 kalles Saturn V. I det første av i alt tre rakett-trinn ble 13.2 tonn drivstoff forbrent pr sekund (dvs $dm/dt = -13.2 \cdot 10^3$ kg/s) og blåst ut bakover med en hastighet $|u| = 2.58$ km/s relativt raketten. Etter 2.5 minutter var alt drivstoff i trinn 1 brukt opp. Oppskytingen startet med raketten i ro på bakken, der tyngdens akselerasjon er $g = 9.81$ m/s². Total masse før avreise var $3.04 \cdot 10^6$ kg.

a) Bruk "rakettligningen" (som vi utledet i forelesningene)

$$ma = F_{\text{ytte}} + F_{\text{skyv}}$$

til å vise at raketten hastighet etter en tid t blir

$$v(t) = -u \ln \frac{m_0}{m} - gt.$$

Her er m_0 startmassen, mens $m = m(t)$ er gjenværende masse ved tidspunktet t . Vi har valgt positiv retning oppover, slik at ytre kraft på raketten er $-mg$. Skyvkraften er $u \cdot \beta$, der u er eksosens hastighet relativt raketten og $\beta = dm/dt$ angir forbrent drivstoffmasse pr tidsenhet. Her er både u og β negative størrelser, og vi antar at de begge er konstante, som antydnet innledningsvis. Vi antar også at tyngdens akselerasjon g kan regnes som konstant. (Denne antagelsen kan du se nærmere på i et frivillig ekstrapunkt *e*) nedenfor.)

b) Hvor stor må skyvkraften minst være for at raketten i det hele tatt skal ta av fra bakken? Sjekk at dette var tilfelle for Saturn V. Regn ut drivstoffmassen m_d ved avreise, $t = 0$, og raketten sluttmasse m_f ved tidspunktet t_f , dvs idet alt drivstoff er brukt opp.

c) Vis at raketten akselerasjon kan skrives som

$$a(t) = \frac{u\beta}{m_0 + \beta t} - g.$$

Bestem akselerasjonen ved $t = 0$. Bestem også akselerasjon og hastighet ved slutten av trinn 1, dvs ved $t = t_f$.

d) Det oppgis at dersom $|x| \ll 1$, er det en god tilnærming å erstatte brøken $1/(1+x)$ med polynomet $1-x$. (Prøv for eksempel med $x = -0.01$.) Bruk Rottmann til å verifisere at $1/(1+x) \simeq 1-x$ når $|x| \ll 1$. Bruk deretter denne opplysningen til å vise at

$$a_{\text{lin}}(t) = a(0) - \frac{u\beta^2}{m_0^2} t$$

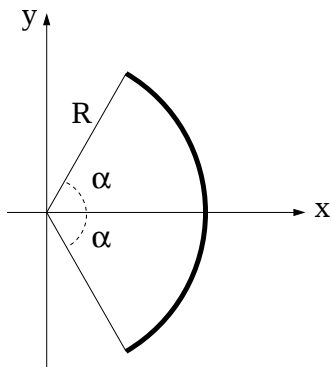
er en god tilnærming for $a(t)$ så lenge $t \ll m_0/(-\beta)$. Ta utgangspunkt i MATLAB-programmet rakett.m og modifier linjene 25 og 48 slik at du får plottet $a(t)$ og $a_{\text{lin}}(t)$ i samme figur, for $0 < t < t_f$. Anslå på øyemål ved hvilket tidspunkt $a_{\text{lin}}(t)$ begynner å bli en "mindre god" tilnærming for $a(t)$. Modifier videre linje 27 slik at du får plottet $v(t)$ i en annen figur.

e) Ekstra: Hvor høyt, h_f , kommer raketten i løpet av dette første oppskytingstrinnet? Raketten trekkes mot jorda med gravitasjonskraften

$$F_G = \frac{GMm}{r^2},$$

der G er gravitasjonskonstanten, M er jordmassen, m er rakettmassen og r er avstanden mellom raketten og jordas sentrum. Anta at jorda er kuleformet med radius $R = 6.37 \cdot 10^3$ km. Hvis du har regnet riktig, har du kommet fram til at h_f er i underkant av 60 km. Bruk disse verdiene til å anslå hvor stor feil du har gjort underveis i dine regninger ved å bruke den konstante verdien 9.81 m/s^2 for tyngdens akselerasjon.

Oppgave 4: Tyngdepunkt



a) En tynn, jevntykk bøyte er en del av en sirkel og har sektorvinkel 2α , som vist i figuren. Sirkelradien er R . Vis at tyngdepunktet er

$$X = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Hva blir resultatet for $\alpha = \pi$ og $\alpha \rightarrow 0$? Er svarene rimelige?

b) Bøylen erstattes av en sirkelsektor (dvs ei tynn, jevntykk skive) med samme åpningsvinkel 2α og radius R . Vis at tyngdepunktet er

$$X = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Hva blir resultatet for $\alpha = \pi$ og $\alpha \rightarrow 0$? Er svarene rimelige?