TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til øving 4.

Oppgave 1.

a) Hastigheten v_1 til kule 1 like før kollisjonen finnes lettest ved å bruke energibevarelse:

$$\begin{aligned} m_1 g L &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \\ \Rightarrow v_1 &= \sqrt{2gL} \end{aligned}$$

Riktig svar: C.

b) Like før støtet antar vi at snora er vertikal, og dermed er det bare vertikale krefter som virker. Kun snordraget S_1 (oppover) og tyngden $m_1 g$ (nedover) virker på kule 1, og N2 gir

$$\begin{aligned} S_1 - m_1 g &= m_1 a = m_1 \frac{v_1^2}{L} = 2 m_1 g \\ \Rightarrow S_1 &= m_1 g + 2 m_1 g = 3 m_1 g \end{aligned}$$

Riktig svar: C.

c) Etter et fullstendig uelastisk støt vil kulene henge sammen. I kollisjonen er impulsen bevart, men ikke energien. Impulsbevarelse gir felleshastigheten $v_1' = v_2' = v'$ etter støtet:

$$\begin{aligned} p &= p' \\ \Rightarrow m_1 v_1 &= (m_1 + m_2) v' \\ \Rightarrow v' &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gL} \end{aligned}$$

Etter kollisjonen svinger kulene til venstre opp til en posisjon i høyde h. Energibevarelse for denne delen av bevegelsen gir

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) g h &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (v')^2 \\ \Rightarrow h &= \frac{(v')^2}{2g} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 L \end{aligned}$$

Riktig svar: E. (Snora når med andre ord ikke opp til horisontal stilling og er helt sikkert stram.)

d) Energien etter støtet er

$$(m_1 + m_2) g h = g \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} L$$

mens den før støtet var $m_1 g L$. Forholdet blir dermed

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Riktig svar: A.

e) I et elastisk støt er også energien bevart. Hastighetene v_1' og v_2' etter støtet er gitt av de to ligningene:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 v_1' + m_2 v_2' \qquad \text{(impulsbevarelse)} \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 &= \frac{1}{2} m_1 (v_1')^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2')^2 \qquad \text{(energibevarelse)} \end{aligned}$$

En effektiv måte å løse disse to ligningene på er (som antydet i forelesningene) å skrive

$$\begin{aligned} m_1(v_1 - v_1') &= m_2 v_2' \\ m_1(v_1^2 - (v_1')^2) &= m_2(v_2')^2 \end{aligned}$$

og deretter dividere den siste med den første. Det gir $v_1 + v_1' = v_2'$. Dette innsatt i ligningen for impulsbevarelse lar oss eliminere v_2', og vi finner

$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 v_1' + m_2(v_1 + v_1') \\ \Rightarrow v_1' &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \end{aligned}$$

Dermed:

$$v_2' = v_1 + v_1' = v_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

(Positive fartsretninger mot venstre.) Riktig svar: B.

f) Det kritiske punktet for kule 2 er toppen. Med v_2'' for hastigheten til kule 2 i toppunktet gir N2 her:

$$\sum F = m_2 a \qquad \Rightarrow \qquad S_2'' + m_2 g = m_2(v_2'')^2/L \qquad \Rightarrow \qquad S_2'' = m_2(v_2'')^2/L - m_2 g.$$

Dersom snora ikke skal slakkes, må snorkrafta S_2'' være større enn null, m.a.o.

$$(v_2'')^2 > gL.$$

Energibevarelse fra bunnpunkt til toppunkt for kule 2 bestemmer v_2'' uttrykt ved v_2' og L:

$$\frac{1}{2} m_2 (v_2')^2 = \frac{1}{2} m_2 (v_2'')^2 + m_2 g \cdot 2L \qquad \Rightarrow \qquad (v_2'')^2 = (v_2')^2 - 4gL.$$

Et uttrykk for v_2' har vi ovenfor. Dermed:

$$4v_1^2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 - g \cdot 4L > gL \qquad \Rightarrow \qquad \frac{m_1}{m_1 + m_2} > \sqrt{\frac{5gL}{4v_1^2}} \qquad \Rightarrow \qquad 1 + \frac{m_2}{m_1} < \sqrt{\frac{4v_1^2}{5gL}}$$

Ovenfor har vi v_1 uttrykt ved g og L, som vi setter inn:

$$\frac{m_2}{m_1} < \sqrt{\frac{4 \cdot 2gL}{5gL}} - 1 = \sqrt{\frac{8}{5}} - 1,$$

dvs

$$\frac{m_1}{m_2} > \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8} - \sqrt{5}}.$$

Riktig svar: E.

<u>Oppgave 2.</u>

a) **C**. Graf 4 er åpenbart mulig: Klossen glir oppover med konstant (negativ) akselerasjon og blir liggende i ro dersom friksjonen mot underlaget er stor nok. Alternativt glir den ned igjen, igjen med konstant akselerasjon, men nå med *mindre* akselerasjon, siden både friksjonskraften og tyngdens komponent tangentielt med skråplanet virker mot bevegelsen når klossen er på vei opp (mens bare friksjonskraften virker mot bevegelsen hvis klossen er på vei ned). Dermed er også graf 2 en mulighet.

b) **C**. Impulsbevarelse gir $2mv_0 = 5mv$, dvs $v = 2v_0/5$. Energitapet er dermed $K_0 - K = (1/2)2mv_0^2 - (1/2)5m(2v_0/5)^2 = 3mv_0^2/5$.

Oppgave 3.

a) Rakettligningen:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg + u\frac{dm}{dt}.$$

Vi ganger ligningen med dt/m og integrerer, fra 0 til v for v, fra 0 til t for t, og fra m_0 til m for m:

$$\int_0^v dv = -g\int_0^t dt + u\int_{m_0}^m \frac{dm}{m},$$

som gir

$$v(t) = -gt + u\ln\frac{m}{m_0} = -u\ln\frac{m_0}{m} - gt.$$

b) Må ha skyvkraft minst like stor som tyngdekraften $m_0 g = 2.98\cdot 10^7$ N. Her er skyvkraften lik $u\beta = 3.40\cdot 10^7$ N, så raketten *vil* lette fra bakken. Drivstoffmassen ved avreise er $m_d = -\beta t_f = 1.98\cdot 10^6$ kg. Raketten uten drivstoff har masse $m_f = m_0 - m_d = 1.06\cdot 10^6$ kg.

c) Fra rakettligningen har vi umiddelbart

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -g + \frac{u}{m}\frac{dm}{dt} = \frac{u\beta}{m} - g.$$

Med konstant drivstoff-forbruk har vi $m = m_0 + \beta t$, og dermed $a(t)$ som oppgitt. Ved $t = 0$: $a(0) = u\beta/m_0 - g = 1.39$ m/s^2. Ved $t = t_f$: $a(t_f) = u\beta/m_f - g = 22.3$ m/s^2.
Innsetting av tallverdier i $v(t)$ fra oppgave *a*) gir $v(t_f) \simeq 1247\,\mathrm{m/s} \simeq 1.25\,\mathrm{km/s}$.

d) Vi kan skrive

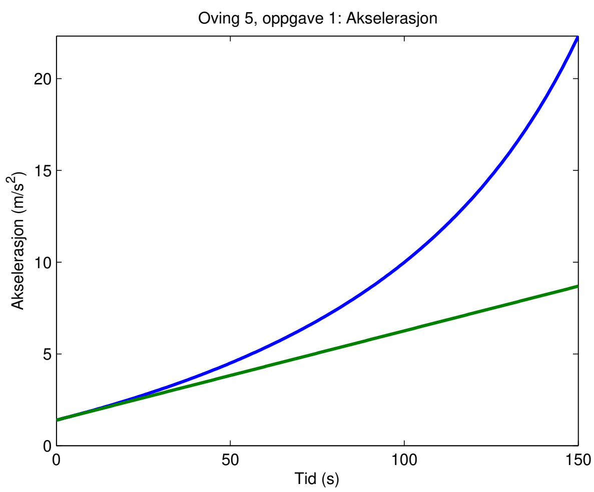
$$a(t) = \frac{u\beta}{m_0}\frac{1}{1+\beta t/m_0} - g.$$

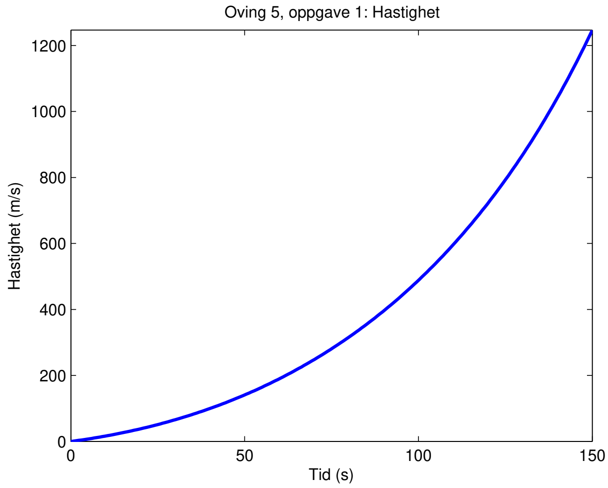
Hvis $t \ll m_0/(-\beta)$, så er $x = -\beta t/m_0 \ll 1$. Dermed er

$$a(t) \simeq a_{\text{lin}}(t) = \frac{u\beta}{m_0}\left(1 - \frac{\beta t}{m_0}\right) - g = a(0) - \frac{u\beta^2}{m_0^2}\,t,$$

som oppgitt.

Figurer produsert med Matlab-programmet rakettlosning.m for hhv akselerasjon og hastighet som funksjon av t:





På øyemål anslår vi at den lineære tilnærmelsen til $a(t)$ er god omtrentlig de første 20 sekundene.

e) Tilbakelagt distanse er gitt ved

$$h(t) = \int_0^t v(t)dt.$$

Vi har at

$$\int \ln x dx = x \ln x - x,$$

siden den deriverte av høyre side her gir tilbake $\ln x$. Litt fundering på hvordan riktige konstanter skal velges her og der gir da

$$h(t) = u\frac{m_0 + \beta t}{\beta} \ln \frac{m_0 + \beta t}{m_0} - ut - \frac{1}{2}gt^2,$$

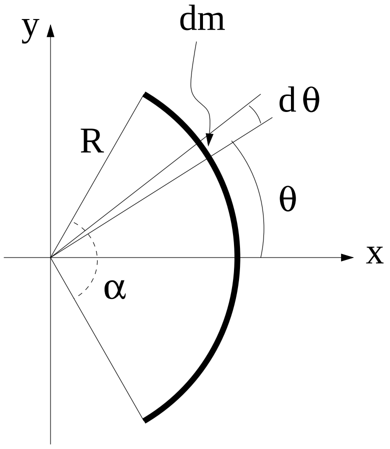
og setter vi inn $t = t_f = 150$ s her, finner vi at $h(t_f) = 58353$ m $\simeq 58.4$ km.

Forholdet mellom $g(0)$, dvs g ved jordoverflaten, og $g(h)$, dvs g i høyden h over bakken, er

$$\frac{g(0)}{g(h)} = \left(\frac{R+h}{R}\right)^2.$$

Setter vi inn $R = 6.37 \cdot 10^3$ km og $h = h_f = 58.4$ km, finner vi at dette forholdet blir ca 1.02. Med andre ord, vi gjør ikke større feil enn et par prosent ved å bruke samme verdi 9.81 m/s^2 for g for hele distansen.

Oppgave 4



a) Massen til del av bøylen innenfor vinkelelementet $d\theta$ er

$$dm = \lambda dl = \lambda R d\theta,$$

der $\lambda = M/2\alpha R$ er bøylens masse pr lengdeenhet (kg/m). Men i slike oppgaver kan det være like greit å ikke innføre massetettheter, idet vi kan uttrykke massen i vinkelelementet $d\theta$ som

$$dm = (\text{total masse}) \cdot (dm \text{ sin andel av hele massen}) = M \cdot \frac{d\theta}{2\alpha}.$$

Med denne dm og bruk av $x = R\cos\theta$ blir tyngdepunktets x-verdi

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{M}\int_{\text{legeme}} x\, dm \;=\; \frac{1}{M}\cdot R\cdot\frac{M}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\, d\theta \\ &= \frac{R}{2\alpha}\left[\sin\alpha - \sin(-\alpha)\right] \;=\; \underline{R\frac{\sin\alpha}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Tyngdepunktets y-verdi er $Y = 0$, av symmetrigrunner.

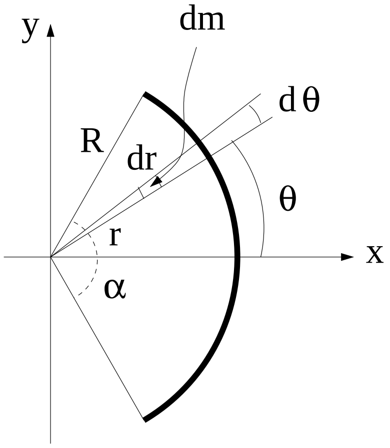
$\alpha = \pi$ gir $X = 0$, som ventet for en hel sirkel.

$\alpha \to 0$ gir $(\sin\alpha)/\alpha \to 1$ og $X = R$, som ventet for en liten masse samlet i $x = R$.

b) Massen til en infinitesimal del av sektoren innenfor vinkelelementet $d\theta$ og radius dr er

$$dm = (\text{total masse}) \cdot (dm \text{ sin andel av hele massen}) = M \cdot \frac{dA}{A} = M \cdot \frac{r d\theta \cdot dr}{\frac{2\alpha}{2\pi}\pi R^2} = M \cdot \frac{r d\theta \cdot dr}{\alpha R^2}.$$

Med denne dm og bruk av $x = r\cos\theta$ blir tyngdepunktets x-verdi



$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{M}\int_{\text{sektor}} x\, dm \;=\; \frac{1}{M}\cdot\frac{M}{\alpha R^2}\int_{\theta=-\alpha}^{\alpha}\int_{r=0}^{R} r^2\cos\theta\, d\theta dr \\ &= \frac{1}{\alpha R^2}\int_{\theta=-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\, d\theta\int_{r=0}^{R} r^2 dr \\ &= \frac{1}{\alpha R^2}\left[\sin\theta\right]_{-\alpha}^{\alpha}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^R \\ &= \underline{\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Tyngdepunktets y-verdi er $Y = 0$, av symmetrigrunner.

Alternativt kan du bruke resultatet fra *a*) ved å betrakte sirkelsektoren som en sum av bøyler med radius fra 0 til R. En bøyle med radius r har da $X = r\,(\sin\alpha)/\alpha$ og masse (sammenlign med det som er gjort ovenfor)

$$dm = M \cdot \frac{dA_{\text{bøyle}}}{A} = M \cdot \frac{r \cdot 2\alpha \cdot dr}{\frac{2\alpha}{2\pi}\pi R^2} = M \cdot \frac{2r \cdot dr}{R^2},$$

og vi får

$$X = \frac{1}{M}\int_{\text{alle bøyler}} X\,dm = \frac{1}{M}\int_0^R r\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,M\frac{2r\cdot dr}{R^2} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{2}{R^2}\int_0^R r^2\,dr = \underline{\frac{2}{3}\,R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}}.$$

$\alpha = \pi$ gir $X = 0$, som ventet for en hel sirkel.

$\alpha \to 0$ gir $(\sin\alpha)/\alpha \to 1$ og $X = 2R/3$, som vel er rimelig for en meget smal sirkelsektor.