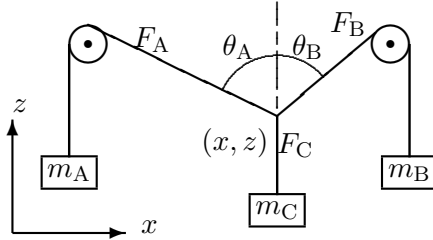


Løsning øving 1.

Oppgave 1.



$F_A = m_A g$ = snorkrafta i snora til masse A.
 $F_B = m_B g$ = snorkrafta i snora til masse B.
 $F_C = m_C g$ = snorkrafta i snora til masse C.
 (x, z) er koordinatene til knutepunktet mellom snorene.

Fordi alle krefter ligger i samme plan, er dette et todimensjonalt problem. Geometrien til systemet eller koordinatene (x, z) til knutepunktet er fullt ut bestemt når massestørrelsene er gitt (så sant de er slik at likevekt som vist på figuren er mulig).

Dette vil si at vi har et problem med to frihetsgrader. For å bestemme disse to frihetsgradene trenger vi to matematisk sett uavhengige skalare likninger som inneholder disse to parametrene pluss massene til vektene A, B og C. Når disse likningene er funnet, er den opprinnelige fysikkoppgaven transformert til et problem i matematikk som, i dette tilfellet, består i å løse et likningssystem bestående av to likninger inneholdende to ukjente.

Innen punktmekanikk er Newtons 2. lov ei likning av sentral betydning. Dette er ei vektorlikning.

Newtons 2. lov for knutepunktet mellom snorene:

$$\{F_x, F_z\} = m_K \{\ddot{x}, \ddot{z}\}, \quad (1)$$

hvor $\vec{F}_K = \{F_x, F_z\}$ er den totale ytre krafta på knutepunktet og m_K er knutepunktets masse. For statisk likevekt er $\ddot{x} = \ddot{z} = 0$, som gir følgende to skalare likninger som inneholder de fri variablene pluss massen til vektene

$$F_x = -F_A \sin \theta_A + F_B \sin \theta_B = 0 \quad (2)$$

$$F_z = F_A \cos \theta_A + F_B \cos \theta_B - F_C = 0 \quad (3)$$

Dette er et eksempel på *kraftbalanse*, noe som alltid opptrer ved analyse av systemer i statisk likevekt. Innsetting av uttrykkene for snorkreftene gir

$$m_A \sin \theta_A - m_B \sin \theta_B = 0 \quad (4)$$

$$m_A \cos \theta_A + m_B \cos \theta_B = m_C. \quad (5)$$

I dette likningssystemet er det fem parametre m_A, m_B, m_C, θ_A og θ_B . Når tre vilkårlig valgte av disse parametrene er gitt, kan likningsettet brukes til å bestemme de to resterende parametrene.

a.

Når m_C, θ_A og θ_B er gitt, gir likningsett (4) to likninger for bestemmelse av m_A og m_B , med løsning

$$m_A = m_C \sin \theta_B / [\cos \theta_A \sin \theta_B + \sin \theta_A \cos \theta_B] \quad (6)$$

$$m_B = m_C \sin \theta_A / [\cos \theta_A \sin \theta_B + \sin \theta_A \cos \theta_B] \quad (7)$$

Tallverdier: $\frac{m_A}{m_B} = \frac{m_C \cdot 2}{(1 + \sqrt{3})} = \underline{7.32 \text{ kg}}$
 $\frac{m_B}{m_C} = \frac{\sqrt{2}}{(1 + \sqrt{3})} = \underline{5.18 \text{ kg}}$

b.

Når m_C , m_A og m_B er gitt gir likningsett (4) og (5) to likninger for bestemmelse av θ_A og θ_B .

Vi gjør disse to ligningene om til likninger for $\cos \theta_A$ og $\cos \theta_B$ ved å kvadrere den første av disse (4) og benytte $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ og så sette dette inn i den andre likningen (5).
 $(4)^2 \Rightarrow m_A^2 (1 - \cos^2 \theta_A) = m_B^2 (1 - \cos^2 \theta_B)$, dvs.

$$\cos^2 \theta_B = 1 - \frac{m_A^2}{m_B^2} + \frac{m_A^2}{m_B^2} \cos^2 \theta_A. \quad (8)$$

(5) $\Rightarrow \cos \theta_B = m_C/m_B - (m_A/m_B) \cos \theta_A$, og kvadrering gir

$$\cos^2 \theta_B = \frac{m_C^2}{m_B^2} - 2 \frac{m_C m_A}{m_B^2} \cos \theta_A + \frac{m_A^2}{m_B^2} \cos^2 \theta_A \quad (9)$$

De to $\cos^2 \theta_B$ -uttrykkene settes lik hverandre, og vi har da ei likning for $\cos \theta_A$

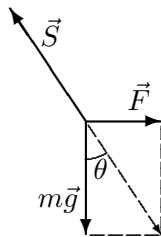
$$1 - \frac{m_A^2}{m_B^2} + \frac{m_A^2}{m_B^2} \cos^2 \theta_A = \frac{m_C^2}{m_B^2} - 2 \frac{m_C m_A}{m_B^2} \cos \theta_A + \frac{m_A^2}{m_B^2} \cos^2 \theta_A \quad (10)$$

hvor $\cos^2 \theta_A$ -leddene faller mot hverandre, og vi står igjen med et uttrykk for $\cos \theta_A$, som etter opprydding gir

$$\boxed{\begin{aligned} \cos \theta_A &= (m_A^2 + m_C^2 - m_B^2)/2m_C m_A \\ \cos \theta_B &= (m_B^2 + m_C^2 - m_A^2)/2m_C m_B \end{aligned}}, \text{ og tilsvarende} \quad (11)$$

Tallverdier: $\cos \theta_A = 0.6 \quad \theta_A = \arccos(0.6) = 0.927 \text{ rad} = \underline{53.1^\circ}$
 $\cos \theta_B = 0.8 \quad \theta_B = \arccos(0.8) = 0.644 \text{ rad} = \underline{36.9^\circ}$

Oppgave 2.



Vi har her å gjøre med et system med en frihetsgrad, dvs. vi trenger ei skalar likning for å beskrive systemet. Fordi vi her har et eksempel på statisk likevekt, gir Newtons 2. lov at $\vec{F}$ og $m\vec{g}$ balanseres av strekket i stanga, $\vec{S}$ som peker *langs stanga*. Dermed må også resultanten av $\vec{F}$ og $m\vec{g}$ peke langs stanga som vist på figuren. Derav følger at

$$\text{tg } \theta = F/mg. \quad (12)$$

a.

Vinkelen θ er gitt. Krafta blir

$$F = mg \text{tg } \theta = (0.1 \cdot 9.8 \cdot \sqrt{3}) \text{ N} = \underline{0.57 \text{ N}}. \quad (13)$$

b.

Krafta F er gitt. Vinkelen blir

$$\theta = \arctg(F/mg) = \arctg(0.2/0.98) = 0.201 \text{ rad} = \underline{11.5^\circ}. \quad (14)$$

c.

Krafta F erstattes av sentripetalkrafta F_r :

$$F_r = mv^2/r = m \cdot (2\pi r/T)^2/r = m \cdot (2\pi/T)^2 r = m \cdot (2\pi/T)^2 \cdot \ell \sin \theta. \quad (15)$$

Dermed er

$$\operatorname{tg} \theta \equiv \sin \theta / \cos \theta = m \cdot (2\pi/T)^2 \cdot \ell \sin \theta / mg, \quad (16)$$

som etter rydding (m og $\sin \theta$ faller bort) gir

$$\begin{aligned} \cos \theta &= g \cdot (T/2\pi)^2 / \ell \\ \underline{\theta} &= \arccos(gT^2/4\pi^2\ell) = \arccos(0.496) = 1.05 \text{ rad} = \underline{60.2^\circ}. \end{aligned} \quad (17)$$

Oppgave 3

Dette er et todimensjonalt problem med to frihetsgrader. Et naturlig førstevalg av frie parametre for dette problemet er x- og z-koordinatene til kula. For å beskrive problemet trenger vi to matematisk uavhengige skalere likninger. Her utgjør x- og z-komponentene av Newtons 2. lov utgjør et slikt sett. Man kan også bytte ut den ene av disse likningene med likninga for energikonservering, som er ei skalar likning.

a.

Den maksimale høyden h finnes lettest fra energikonserveringsprinsippet: Bevegelses-energien loddrett underlaget, mv_{0z}^2 , går over til potensiell energi mgh :

$$mv_{0z}^2/2 = mgh \quad \text{hvor} \quad v_{0z} = v \sin \theta, \quad (18)$$

dvs.

$$\underline{h} = v^2 \sin^2 \theta / 2g = \underline{63.8 \text{ m}}. \quad (19)$$

Tida som kula er i lufta, finnes av uttrykket for høyden som funksjon av tida τ , $z(\tau)$ – er den tida hvor $z = 0$ igjen. Med

$$z(\tau) = v_{0z}\tau - g\tau^2/2, \quad (20)$$

fåes dermed

$$\underline{t} = \tau(z = 0) = 2v_{0z}/g = 2v \sin \theta / g = \underline{7.2 \text{ s}}. \quad (21)$$

Lengden som kula har gått, er

$$\underline{\ell} = v_{0x}t = v \cos \theta t \quad (22)$$

$$= 2v^2 \sin \theta \cos \theta / g = v^2 \sin(2\theta) / g = \underline{255 \text{ m}}. \quad (23)$$

b.

Parameterene ℓ og t er nå kjente, og v og θ er ukjente. Sammenhengene mellom de kjente og ukjente størrelsene er funnet under punkt a. – med litt omkalfatring kan vi skrive dem som

$$\begin{aligned} v \sin \theta &= gt/2 \\ v \cos \theta &= \ell/t. \end{aligned} \quad (24)$$

Dividerer vi disse to uttrykkene med hverandre, får vi

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= gt^2/2\ell \\ \underline{\theta} &= \operatorname{arctg}(gt^2/2\ell) = 1.05 \text{ rad} \approx \underline{60^\circ}. \end{aligned} \quad (25)$$

og kvadrerer vi uttrykkene og legger sammen, får vi

$$\begin{aligned} v^2 &= (gt/2)^2 + (\ell/t)^2 \\ v &= \sqrt{(gt/2)^2 + (\ell/t)^2} \approx \underline{25 \text{ m/s}}. \end{aligned} \quad (26)$$