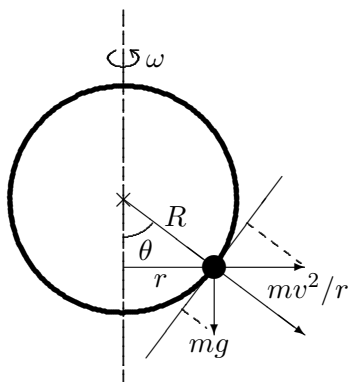


Løsning øving 3.

Oppgave 1.



Når kula er i “likevekt”, roterer den med ringen i en avstand $r = R \sin \theta$ fra rotasjonsaksen (se figuren).

Rotasjonshastigheten er: $v = (\text{omkrets})/(\text{omløpstid}) = (2\pi r)/(2\pi/\omega) = \omega r$.

Kreftene som virker på kula, er: “sentrifugalkrafta” $\vec{F}_s = (mv^2/r)\hat{e}_r$, tyngdekrafta $\vec{F}_g = m\vec{g}$, og reaksjonskrafta fra ringen, som fordi det ikke er friksjon, må peke loddrett på ringen.

For kraftbalanse – $\sum \vec{F} = 0$ – må således summen av sentrifugalkraft og tyngdekraft også peke loddrett på ringen, som vist på figuren.

For gitt vinkelhastighet ω ser man at dette er et system som er fullt ut beskrevet av vinkelen θ , dvs. at vi har et system med en frihetsgrad. For å bestemme systemet trengs altså ei skalar likning som inneholder ω . I dette tilfellet er denne likninga kraftbalansekravet i tangensiell retning, dvs.

$$-F_s \cos \theta + F_g \sin \theta = 0. \quad (1)$$

Innsetting $F_s = mv^2/r = m\omega^2 r = m\omega^2 R \sin \theta$ gir

$$(m\omega^2 R \sin \theta)/(mg) = \sin \theta / \cos \theta. \quad (2)$$

Etter litt opprydding gir dette $\cos \theta = g/\omega^2 R$, og dermed

$$\theta = \arccos(g/\omega^2 R) \quad (\omega = 2\pi f = 2\pi/T). \quad (3)$$

Tallverdier:

$$i. \theta = \arccos\{9.8 \text{ (m/s}^2\text{)} / [(2\pi \cdot 3\text{s}^{-1})^2 \cdot 0.1 \text{ m}]\} = \arccos\{0.276\} = 74^\circ.$$

ii. $\theta = \arccos\{9.8/[(2\pi \cdot 1)^2 \cdot 0.1]\} = \arccos\{2.48\}$. Men $-\cos \theta$ kan ikke bli større enn 1 – som betyr at det ikke finnes noen vinkel som svarer til $\arccos\{2.48\}$. Dette innebærer at det er nødvendig med en minste vinkelfrekvens ω bestemt av $g/(\omega^2 R) = 1$ før sentrifugalkrafta blir stor nok til å flytte kula ut til sida. For mindre vinkelfrekvenser “vinner tyngdekrafta”, og kula blir liggende i ro i $\theta = 0$.

Oppgave 2.

Dette er et system med en frihetsgrad, h . Det vil si at vi trenger ei skalare likning for å beskrive systemet. Det er oppgitt i oppgaveteksten at vi som vår skalare likning skal benytte likninga for energikonservering.

Ved forsøket begynner er potensiell energi $V_0 = m_1gh$ og kinetisk energi $W_0 = 0$.

Når lodd 1 når bakken, er potensiell energi $V_1 = m_2gh$ og kinetisk energi $W_1 = W_{\text{trans}} + W_{\text{rot}} = (1/2)(m_1 + m_2)v^2 + (1/2)I\omega^2$.

Her er treghetsmomentet til trinsa $I = mR^2$ (som for tynn ring). Periferihastigheten til trinsa er lik snor-hastigheten v , og vinkelhastigheten er dermed $\omega = v/R$, dvs. $I\omega^2 = mv^2$ og $W_1 = (1/2)(m_1 + m_2 + m)v^2$.

Energikonserveringslikninga $V_0 + W_0 = V_1 + W_1$ gir dermed ei likning for hastighet v , med løsning

$$v = \sqrt{2gh} \sqrt{(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2 + m)}. \quad (4)$$

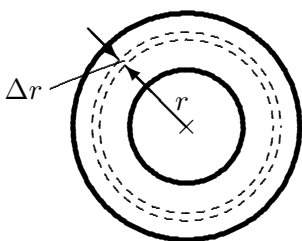
Middelhastigheten er $\bar{v} = (0 + v)/2 = v/2$, og tiden t er gitt ved at $h = \bar{v}t$. Dermed fåes

$$t = \sqrt{2h/g} \sqrt{(m_1 + m_2 + m)/(m_1 - m_2)}, \quad (5)$$

hvor den første kvadratrot gir "fritt fall-tida".

Tallverdi: $t = \sqrt{2 \cdot 5 \text{ m} / (9.8 \text{ m/s}^2)} \sqrt{(3 + 2 + 5)/(3 - 2)} = 1.01 \text{ s} \sqrt{10} = \underline{3.19 \text{ s}}$.

Oppgave 3



Vi skal først finne treghetsmomentet til hjulet, $I \equiv \sum m_i r_i^2$. Hjulet har masse M , innerradius $R_1 = D/4$ og yterradius $R_2 = D/2$.

Betrakt først en del av hjulet; en ring med radius r , tykkelse Δr og masse Δm ; og finn treghetsmomentet til denne ringen, ΔI .

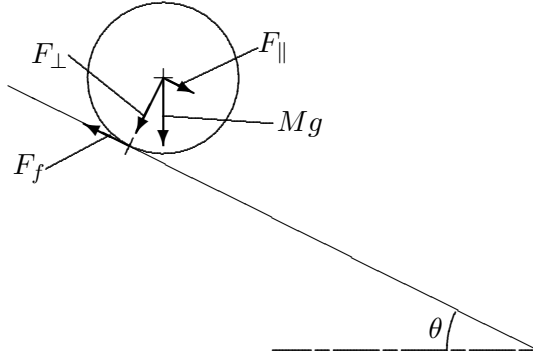
$$\begin{aligned} \Delta m &= (\text{massen til hjulet}) \times [(\text{areal av ringen}) / (\text{areal av hjulet})] \\ &= M \cdot [2\pi r \Delta r] / [\pi(R_2^2 - R_1^2)] = 2Mr\Delta r / (R_2^2 - R_1^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Treghetsmomentet til ringen om hjulaksen er – per definisjon –

$$\Delta I = \Delta m \cdot r^2 = \{2M/(R_2^2 - R_1^2)\} r^3 \Delta r. \quad (7)$$

Treghetsmomentet til hele hjulet om aksen blir da

$$\begin{aligned}
 I_T &= \int_{r=R_1}^{R_2} dI(r) = \frac{2M}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{2M}{R_2^2 - R_1^2} [r^4/4]_{R_1}^{R_2} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{M}{R_2^2 - R_1^2} (R_2^4 - R_1^4) \stackrel{R_1=R_2/2}{=} \frac{1}{2} M R_2^2 \frac{1 - (1/2)^4}{1 - (1/2)^2} \\
 &\stackrel{R_2=D/2}{=} \underline{(5/32) M D^2}.
 \end{aligned} \tag{8}$$



Hjulet påvirkes av tyngdekrafta $M\vec{g}$ og (statisk) friksjonskraft fra underlaget $\vec{F}_f$. Det akselereres langs skråplanet av totalkrafta langs planet, $F_{\parallel} - F_f$, og roteres om hjulaksen av dreiemomentet $\tau = F_f \cdot R$ ($R = D/2$). Til bestemmelse av bevegelsen har vi dermed:

$$\begin{aligned}
 \text{Newtons 2. lov} &: F_{\parallel} - F_f = M dv/dt & \text{(I)} \\
 \text{Dreiemomentlikninga} &: F_f D/2 = I_T d\omega/dt & \text{(II)} \\
 \text{“Rullebetingelse”} &: v = \omega D/2 & \text{(III)} \\
 \text{(III) innsatt i (II)} &\Rightarrow F_f = (4I_T/D^2) dv/dt & \text{(IV)}
 \end{aligned}$$

(IV) innsatt i (I) gir så

$$F_{\parallel} = M G \sin \theta = (M + 4I_T/D^2) dv/dt. \tag{9}$$

Her er $I_T/D^2 = [(5/32)MD^2]/D^2 = (5/32)M$, og følgelig $M + 4I_T/D^2 = (1 + 5/8)M = (13/8)M$. Dermed har vi for akselerasjonen a uttrykket

$$a \equiv dv/dt = (8/13) g \sin \theta. \tag{10}$$

Satt tilbake i (IV) gir dette ei friksjonskraft

$$F_f = 4 \cdot (5/32) M a = (5/13) M g \sin \theta. \tag{11}$$

Ved rulling uten glidning er friksjonen statisk, og friksjonskrafta er *maksimalt* lik produktet av statisk friksjonskoeffisient og normalkraft;

$$F_f < \mu_S F_{\perp} = \mu_S \cdot M g \cos \theta. \tag{12}$$

Vinkelen $\theta_{\max}$ hvor hjulet begynner å gli, er dermed gitt av $\mu_S M g \cos \theta_{\max} = (5/13) M g \sin \theta_{\max}$, dvs. $\tan \theta_{\max} = (13/5) \mu_S$.

$$\theta_{\max} = \arctg \left(\frac{13}{5} \mu_S \right). \tag{13}$$

Talleksempel: $\mu_S = 0.5 \Rightarrow \theta_{\max} = 52^\circ$, mens $\mu_S = 1$ gir maksimalt mulige vinkel før det glir lik 69° .