

Løsning øving 4.

Oppgave 1.

Dette er en modell med en frihetsgrad, som enten kan velges som z-koordinaten til jo-joen, z , eller vinkel som jo-joen har rullet av θ . Sammenhengen mellom disse to variablene er $z = -(d/2)\theta$ når vi lar $\theta = 0$ svare til $z = 0$. Videre ser man at $v = dz/dt = -(d/2)d\theta/dt = -(d/2)\omega$. Men selv om vi bare har en frihetsgrad har vi her to ukjente fordi strekket S i snora er ukjent. For løse problemet trenger vi da to likninger som inneholder de to ukjente, som vi kan velge som, S og z . Det som det spørres om i oppgaveteksten er S og $a = dv/dt = d^2z/dt^2$.

Vi har *to* bevegelseslikninger, ei for translasjon og ei for rotasjon:

$$F = m dv/dt \text{ og } \tau = I d\omega/dt.$$

Her er $F = (\text{tyngdekraft} - \text{snorkraft}) = mg - S$, og dreiemoment om akselen er $\tau = (\text{arm til 'rullepunktet'}) \times (\text{snorkraft}) = (d/2) \cdot S$.

Bevegelseslikningene kan dermed skrives som

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} & mg - S & = m dv/dt \\ \text{(II)} & (d/2)S & = I \cdot (2/d) \cdot dv/dt \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{To likninger med to ukjente,} \\ S \text{ og } dv/dt \equiv a. \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\text{(I)} + (2/d) \cdot \text{(II)} \Rightarrow mg = [m + (4I/d^2)] dv/dt$$

$$\begin{array}{lcl} a & = & dv/dt = g/[1 + 4I/(md^2)] \\ S & = & m(g - a). \end{array}$$

(2)

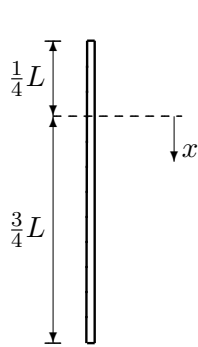
Her er $m = (\text{tetthet}) \times (\text{volum}) = \rho V = (\pi/2) \rho b D^2$ (vekta av akselen neglisjeres), og $I = (m/2)(D/2)^2 = mD^2/8$. Uttrykket for akselerasjonen kan da skrives om til

$$a = g/[1 + (1/2)D^2/d^2].$$

(3)

Tallverdier: $a = g/[1 + (1/2) \cdot (50/7.5)^2] = 9.8(\text{m/s}^2)/23.2 = \underline{0.42 \text{ m/s}^2}$
 $m = (\pi/2) \cdot 0.8 \cdot 10^3(\text{kg/m}^2) \cdot (0.05)^2 \cdot (0.01) \text{ m}^3 = \underline{0.031 \text{ kg}}$
 $\underline{S} = mg(1 - a/g) = mg \cdot 0.957 = \underline{0.29 \text{ N}}$

Oppgave 2.



Gitt en tynn, homogen stav med masse m og lengde L .
Trehetsmomentet om $x = 0$ (se figuren) er

$$\begin{aligned} I &= \int_{-L/4}^{3L/4} x^2 dm = \int_{-L/4}^{3L/4} x^2 M(dx/L) \\ &= (M/L) [x^3/3]_{-L/4}^{3L/4} = \frac{7}{48} ML^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Fordi det er gitt at kulemassen er mye mindre enn pendelmassen, har vi at trehetsmomentet til kule pluss pendel med god tilnærming også er gitt av det matematiske uttrykket over.

Dreieimpulsen til kule pluss pendel rett *før* treffet: $L_d = |\vec{r} \times m\vec{v}| = mvL/2$.

Dreieimpuls til kule pluss pendel rett *etter* treffet: $L_d = I\omega_0$.

$$\Rightarrow I\omega_0 = mvL/2 \quad \text{og} \quad \omega_0 = [(7/48)ML^2]^{-1} (mvL/2) = (24/7)(m/M)(v/L).$$

Enden av staven – i avstand $3L/4$ fra aksen – løftes en høyde h .

Tyngdepunktet – i en avstand $L/4$ fra aksen – løftes $h/3$.

Energiebevarelse: $W_{\text{rot}} = (1/2)I\omega_0^2 \rightarrow V = Mgh/3$.

$$(1/2)I\omega_0^2 = Mgh/3 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} h &= (3/2)I\omega_0^2/Mg = (3/2)I(mvL/2I)^2/Mg \\ &= (3/8)(m^2v^2L^2)/(IMg) = (3/8)(48/7)(m^2v^2L^2)/(ML^2Mg). \end{aligned}$$

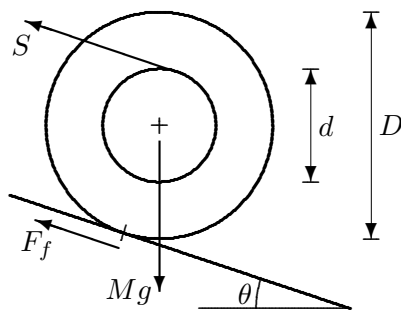
Vi har dermed følgende uttrykk for høyden h :

$$h = \frac{18}{7} \frac{m^2}{M^2} \frac{v^2}{g}$$

(5)

Tallverdi: $h = (18/7)(1/100)^2(100 \text{ m/s})^2/(9.8 \text{ m/s}^2) = \underline{0.26 \text{ m}}$.

Oppgave 3



Akselererende kraft langs skråplanet er
 $F = Mg \sin \theta - F_f - S$, hvor F_f er friksjonskrafta.

Dreiemoment om hjulaksen er

$$\tau = S d/2 - F_f D/2$$

Statistiske likevektsbetingelser er

$$F = 0 \quad \text{og} \quad \tau = 0$$

Statisk friksjonskraft kan ligge mellom null og en øvre grense: $F_f \leq \mu_S f_{\perp} = \mu_S Mg \cos \theta$.

Grensa – dvs. hvor snellen akkurat glipper fra underlaget og begynner å rulle/skli:

$$F_f = \mu_S Mg \cos \theta \Rightarrow \theta = \theta_0.$$

Momentlikevekt $\tau = 0 \Rightarrow S = (D/d)F_f$. Dette settes inn i likning for kraftlikevekt $F = 0$, og gir

$$Mg \sin \theta - F_f - (D/d)F_f = 0.$$

Innsetting i dette av grenseverdien av F_f gir ei likning for θ_0 :

$$Mg \sin \theta_0 = \mu_S Mg \cos \theta_0 (1 + D/d),$$

dvs.

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \mu_S (1 + D/d),$$

og dermed

$$\theta_0 = \arctg [\mu_S (1 + D/d)], \quad (6)$$

og strekk-krafta

$$S = M g \cdot [(D/d) \mu_S \cos \theta_0].$$

Dynamisk likevekt

Når snellen har begynt å skli/rulle, er krefter og dreiemomenter balansert av treghetskrefter, dvs.

$$F = M dv/dt \equiv Ma \quad (7)$$

$$\tau = I_T d\omega/dt \quad (I_T : \text{treghetsmomentet om hjulaksen}) \quad (8)$$

Snora rulles ut med hastighet $v = \omega d/2$, og dermed kan dreiemomentet skrives som

$$\tau = I_T (d/dt)(2v/d) = (2I_T/d) dv/dt \equiv (2I_T/d) a,$$

mens friksjonskrafta nå er gitt av den *kinetiske* friksjonskoeffisienten μ_K :

$$F_f = \mu_K F_\perp = \mu_K Mg \cos \theta_0$$

Våre to balanselikninger (' F -likninga' og ' τ -likninga') gir da

$$Mg \sin \theta_0 - F_f - S_1 = Ma \quad S_1 d/2 - F_f D/2 = (2I_T/d) a.$$

Dette er to likninger med to ukjente (a og S_1) – og det greier vi å løse.

Det enkleste er kanskje først å dividere likningene med hverandre – dermed forsvinner a –, så rydde opp for å få S_1 alene til venstre og så til slutt å sette inn det nå kjente uttrykket for $F_f(\theta_0)$.

Og dermed får man

$$S_1 = Mg [\sin \theta_0 - \mu_k \cos \theta_0 (1 - \frac{1}{4} MDd/I_T)] / (1 + \frac{1}{4} Md^2/I_T). \quad (9)$$