

Løsning øving 5.

Oppgave 1.

Dreiemomentet er

$$\tau = -\kappa\theta. \quad (1)$$

Torsjonskonstanten er $\kappa = \mu\pi d^4/32\ell$ (oppgitt), og treghetsmomentet til skiven er

$$I = \int_{r=0}^{D/2} r^2 dm = \int_0^{D/2} r^2 (2\pi r dr / [\pi(D/2)^2]) M = MD^2/8. \quad (2)$$

Dreiemomentlikninga $\tau = I\ddot{\theta}$ blir med dette $-\kappa\theta = I\ddot{\theta}$, som kan skrives som ei standard harmonisk oscillator-likning av form

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad \text{med} \quad \omega_0^2 = \kappa/I. \quad (3)$$

Sammenhengen mellom vinkelfrekvens ω_0 og periode T er $\omega_0 = 2\pi/T$. Vi har dermed sammenhengen

$$(2\pi/T)^2 = \kappa/I = (\mu\pi d^4/32\ell)/(MD^2/8), \quad (4)$$

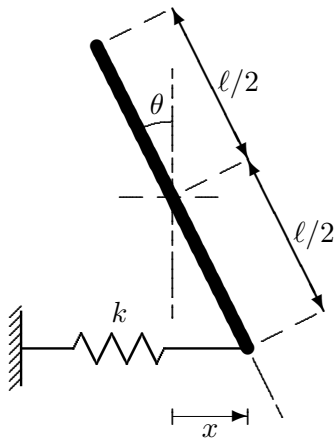
som løst med hensyn på skjærmodulen μ gir

$$\mu = 16\pi M\ell D^2/T^2 d^4.$$

(5)

Tallverdi: $\mu = 3.49 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ — som er verdien for messing.

Oppgave 2.



Ei dreining θ av staven gir ei forskyvning av enden $x = (\ell/2) \sin \theta$ og $y = (\ell/2)(1 - \cos \theta)$. For små θ kan dette approksimeres med $x \approx (\ell/2) \theta$ og $y \approx (\ell/2) \theta^2/2 \approx 0$. Vi kan dermed regne med ei fjærkraft $F \approx -kx \approx -k(\ell/2)\theta$, som står tilnærmet loddrett på staven, og gir et dreiemoment

$$\tau \approx (\ell/2)F \approx -k(\ell^2/4)\theta. \quad (6)$$

Tregghetsmomentet til staven om aksene er

$$I = \int_{r=-\ell/2}^{\ell/2} r^2 dm \quad \text{med} \quad dm = (M/\ell) dr, \quad (7)$$

dvs.

$$I = (M/\ell) \int_{-\ell/2}^{\ell/2} r^2 dr = (M/\ell) [r^3/3]_{-\ell/2}^{\ell/2} = M\ell^2/12. \quad (8)$$

Dreiemomentlikninga $\tau = I\ddot{\theta}$ blir da

$$-(k\ell^2/4)\theta = (M\ell^2/12)\ddot{\theta} \quad , \text{dvs.} \quad (9)$$

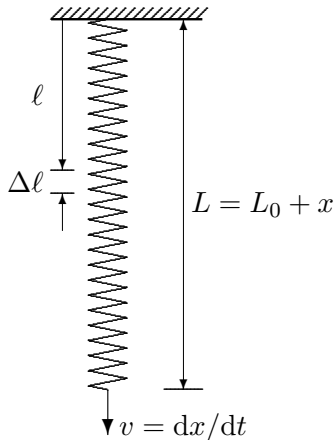
$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad , \text{med} \quad \omega_0^2 = (k\ell^2/4)/(M\ell^2/12) = \underline{3k/M}. \quad (10)$$

Dette er differensiallikning for enkel, harmonisk bevegelse med periode

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{M/3k}.$$

(11)

Oppgave 3



Fjæren har lengde $L = L_0 + x$, og masse M . Massen til et element med lengde $\Delta\ell$ er $\Delta M = (M/L) \Delta\ell$. Farten til elementet varierer lineært fra null ved $\ell = 0$ til $v = dx/dt$ ved $\ell = L$, dvs. $u = v \ell/L$.

Den kinetiske energien til elementet er

$$\Delta W_k = (1/2)\Delta M u^2 = (1/2)(M/L)\Delta\ell \cdot (v\ell/L)^2 = (1/2)Mv^2 \cdot (\ell^2\Delta\ell/L^3), \quad (12)$$

og den kinetiske energien til hele fjæra blir

$$\underline{W_k} = \int_{\ell=0}^L dW_k = (1/2)(Mv^2/L^3) \int_{\ell=0}^L \ell^2 d\ell = \underline{\underline{Mv^2/6}}. \quad (13)$$

Den potensielle energien er (som vanlig) $V(x) = (1/2)kx^2$, og den totale energien – la oss kalle den E – blir dermed

$E = V + W_k = kx^2/2 + Mv^2/6.$

(14)

Den totale energien er konstant, og dermed er $dE/dt = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= dE/dt = (k/2)dx^2/dt + (M/6)dv^2/dt = kx dx/dt + (M/3)v dv/dt \\ &\stackrel{v \equiv dx/dt}{=} (dx/dt) \cdot [kx + (M/3)d^2x/dt^2]. \end{aligned} \quad (15)$$

Hvis ikke $v \equiv 0$ (ingen svingning i det hele tatt), må hakeparantesen [...] være lik null, og vi står etter litt opprydding igjen med ei svingelikning

$d^2x/dt^2 + (3k/M)x = 0,$

(16)

som er av form $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, med $\omega_0 = \sqrt{3k/M}$.

Kommentar: Beregningen ovenfor er et eksempel på forenkling av et mer komplisert problem. Nøyaktigheten av svaret avhenger da av hvor god den brukte antagelsen for v er. Riktig beskrivelse er gitt ved bølgeforplantning langs fjæra som beskrives ved differensiallikningen for bølgeforplantning (se bølgelæren). Med "løs" ende har en da at fjæra kan svinge med egenfrekvensene $\omega_n = \omega_0(2n+1)$ der n er heltall og ω_0 er grunnfrekvensen eller laveste frekvens. For lavest frekvens er da hastigheten beskrevet ved $u = v \sin(\frac{\pi\ell}{2L}) \neq v\ell/L$. Integrert gir dette $W_k = Mv^2/4$. Den potensielle energien viser seg da å bli $V = (\pi/2)^2 kx^2/4$. Dette betyr at den laveste frekvensen blir $\omega_0 = (\pi/2)\sqrt{k/M}$.