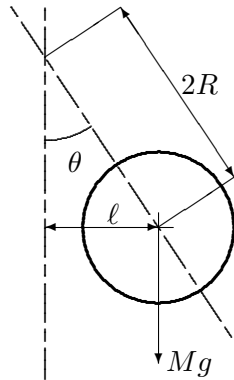


Løsning øving 6.

Oppgave 1.

A.



Tyngdekrafta angriper i tyngdepunktet – midt i skiva – med arm ℓ , og gir dreiemoment

$$\tau = -Mg\ell = -Mg \cdot 2R \sin \theta$$

$$\tau = I\ddot{\theta} \Rightarrow -2MgR \sin \theta = (9/2)MR^2\ddot{\theta}$$

Små $\theta \Rightarrow \sin \theta \rightarrow \theta$. Innsetting og rydding gir

$$\ddot{\theta} + (4/9)(g/R)\theta = 0, \quad (1)$$

som er likninga for harmonisk bevegelse med vinkelfrekvens $\omega_0 = \sqrt{(4/9)(g/R)}$.

B.

$t_0 = 2\pi/\omega_0$ med $\omega_0^2 = (4/9)(g/R)$ gir

$$R = 4g/9\omega_0^2 = 4gt_0^2/[9 \cdot (2\pi)^2] = \underline{gt_0^2/9\pi^2}$$

$$\text{Tallverdi: } 9.81 \text{ (m/s}^2\text{)} \cdot (0.5 \text{ s})^2/9\pi^2 = \underline{0.0276 \text{ m}}.$$

$$T \rightarrow T - \Delta T \Rightarrow R \rightarrow R - \Delta R = R(1 - \Delta R/R), \quad \text{hvor } \Delta R/R = \alpha \Delta T.$$

$$t_0 \rightarrow t_0(1 - 7s/24h) = t_0(1 - 7/(24 \cdot 3600)) = t_0(1 - 8.1 \cdot 10^{-5})$$

$$R \propto t_0^2 \Rightarrow \Delta R/R = \Delta(t_0^2)/t_0^2 = 2\Delta t_0/t_0$$

$$\Delta t_0/t_0 = -8.1 \cdot 10^{-5} \Rightarrow \Delta R/R = -2 \cdot 8.1 \cdot 10^{-5} = -16.2 \cdot 10^{-5}$$

$$\underline{\alpha = (\Delta R/R)/\Delta T = -16.2 \cdot 10^{-5}/(12 - 20)K = \underline{2.03 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}}.$$

C.

$$\begin{aligned} I_T &= \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \cdot M \cdot (2\pi r dr)/(\pi R^2) \\ &= (2M/R^2) \int_0^R r^3 dr = (2M/R^2) \cdot (R^4/4) = (1/2)MR^2 \\ \underline{I} &= I_T + M \cdot (2R)^2 = MR^2 \cdot [(1/2) + 4] = \underline{(9/2)MR^2}. \end{aligned}$$

Oppgave 2.

Den statiske nedbøyinga y_0 er proporsjonal med vekten til massen M , og vi skriver $Mg = k \cdot y_0$, hvor k er 'fjærkonstanten'.

I bevegelseslikninga for massen M (fjærmassen neglisjeres), $F = M\ddot{y}$, blir da

$$F = -k \cdot y - b \cdot v_y = -(Mg/y_0) y - b\dot{y}.$$

Etter opprydding gir dette ei svingelikning av form

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0, \text{ med } \delta = (1/2)b/M \text{ og } \omega_0^2 = g/y_0.$$

$$\begin{aligned} T_0 = 2\pi/\omega_0 &\Rightarrow y_0 = g/\omega_0^2 = gT_0^2/4\pi^2 \\ \delta = 0.6\omega_0 &\Rightarrow b = 2M\delta = 2M \cdot 0.6 \cdot 2\pi/T_0 = (12\pi/5)M/T_0. \end{aligned}$$

Tilleggsmassen m gir ei ekstra statisk nedbøying $\Delta y_0 = (m/M)y_0$.

Begynnelsesbetingelsene for svingningene blir dermed

$$y(0) = (m/M)y_0 \quad \text{og} \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Med løsning av form $y(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \phi)$ gir begynnelsesbetingelsene likninger for størrelsene A og ϕ :

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad y(0) &= A \cos \phi = (m/M)y_0 \\ \text{(II)} \quad \dot{y}(0) &= -\delta \cdot A \cos \phi - \omega_d \cdot A \sin \phi = 0 \\ \text{(II)} \quad \text{gir} \quad \delta \cos \phi &= -\omega_d \sin \phi, \text{ dvs. } \phi = \arctg(-\delta/\omega_d) \\ \text{(I)} \quad \text{gir så} \quad A &= (m/M)y_0 / \cos \phi, \end{aligned}$$

- som med litt omskriving kan skrives som $A = (m/M)y_0 \sqrt{1 + (\delta/\omega_d)^2}$.

TALLVERDIER:

$$y_0 = (9.81 \cdot 0.5^2 / 4\pi^2) m = \underline{0.062 \text{ m}}$$

$$\{\omega_d^2 = \omega_0^2 - \delta^2 = \omega_0^2 - (0.6\omega_0)^2 = 0.64\omega_0^2 \ ; \ \omega_d = 0.8\omega_0 \Rightarrow\}$$

$$T_d = T_0 \cdot (\omega_0/\omega_d) = T_0/0.8 = (0.5/0.8) \text{ s} = \underline{0.625 \text{ s}}$$

$$\phi = -\arctg(0.6\omega_0/0.8\omega_0) = -\arctg(3/4) = \underline{-0.64 \text{ rad}} \quad (-37^\circ)$$

(og vinkelen er i 4. kvadrant, ikke i 2. kvadrant).

$$A = 0.1y_0 \sqrt{1 + (3/4)^2} = 0.1y_0 \cdot (5/4) = \underline{0.0078 \text{ m}}$$