

Løsning øving 9.

Oppgave 1.

Lengdeforandring: $\underline{\Delta\ell} = \alpha\ell\Delta T = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \cdot 12 \text{ m} \cdot 43 \text{ K} = \underline{6,2 \text{ mm}}$

som da blir mellomrommet når skinnene legges.

Trykkspenninga som skal til for å hindre tøyninga $\Delta\ell/\ell$, er

$$\underline{p} = E \cdot \frac{\Delta\ell}{\ell} = 21 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \cdot \frac{6,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{12 \text{ m}} = \underline{1,08 \cdot 10^8 \text{ Pa}}$$

Oppgave 2.

a) Grunnmode: $\lambda/2 = \ell$, med $\lambda = v/f$ og $v = \sqrt{\sigma/\rho}$

$$\Rightarrow \sigma = \rho \cdot (2\ell f)^2$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 7,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot (2 \cdot 0,5 \text{ m} \cdot 206 \text{ s}^{-1})^2 \\ &= 3,35 \cdot 10^8 \text{ kgm/s}^2 \cdot \text{m}^{-2} = \underline{3,35 \cdot 10^8 \text{ Pa}} \end{aligned}$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 \cdot \left(\frac{225 \text{ s}^{-1}}{206 \text{ s}^{-1}} \right)^2 = \underline{4,00 \cdot 10^8 \text{ Pa}}$$

b) Lengdeendring pga. temperatursenkning i ståltråden er $\frac{\Delta\ell_{\text{trad}}}{\ell} = \alpha \cdot \Delta T$.

Noe av lengdeendringen tas opp av krympingen av ramme: $\frac{\Delta\ell_{\text{ramme}}}{\ell} = \alpha_{\text{invar}} \cdot \Delta T$.

Resten av lengdeendringen må “tas opp” ved økning av strekk i tråden. Økning av strekket er $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1 = 0,65 \cdot 10^8 \text{ Pa}$, og vi regner ut:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\ell_{\text{trad}}}{\ell} - \frac{\Delta\ell_{\text{ramme}}}{\ell} &= \left(\frac{\Delta\ell}{\ell} \right)_{\text{strekk}} \\ (\alpha - \alpha_{\text{invar}}) \cdot \Delta T &= \frac{\Delta\sigma}{E_{\text{stal}}} \\ \Rightarrow \underline{\alpha} &= \alpha_{\text{invar}} + \frac{\Delta\sigma}{E_{\text{stal}}\Delta T} \\ &= 0,90 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} + \frac{0,65 \cdot 10^8 \text{ Pa}}{20 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \cdot 30 \text{ K}} = \underline{11,7 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}}. \end{aligned}$$

KOMMENTAR: Merk at α_{invar} er bare $\frac{0,90}{11,7} = 7,7 \%$ av α_{stal} .

Når man har fått tallverdi for α kan man beregne $\Delta\ell_{\text{trad}} = -176 \text{ }\mu\text{m}$ og $\Delta\ell_{\text{ramme}} = -13,5 \text{ }\mu\text{m}$.

Oppgave 3.

Total varmekapasitet for (kanne + vann) $\mathcal{C}$ [J/K] er

$$\mathcal{C} = C_{\text{Al}} m_{\text{Al}} + C_{\text{H}_2\text{O}} m_{\text{H}_2\text{O}} = (0.91 \cdot 1.5 + 4.19 \cdot 2.5) \text{ kJ/K} = 11.84 \text{ kJ/K}$$

Varmemengden som må tilføres er dermed

$$\underline{Q} = \mathcal{C} \cdot \Delta T = 11.84 \cdot (100 - 12) \text{ kJ} = 1.04 \cdot 10^6 \text{ J} \equiv \underline{1.04 \text{ MJ}} \quad (\text{mega-joule})$$

$$1 \text{ J} \equiv 1 \text{ Ws} ; 1 \text{ W} = (1/1000) \text{ kW} ; 1 \text{ s} = (1/3600) \text{ h} ; 1 \text{ J} = 1 \text{ kW}/3.6 \cdot 10^6 \Rightarrow$$

$$\underline{Q} = (1.04 \cdot 10^6 / 3.6 \cdot 10^6) \text{ kWh} = \underline{0.289 \text{ kWh}} \quad (\text{kilowatt-timer})$$

$$\text{'Energi = effekt} \times \text{tid': } Q = P \cdot t \Rightarrow$$

$$\underline{t} = Q/P = 0.289 \text{ kWh}/1.5 \text{ kW} = 0.193 \text{ h} = 11.56 \text{ min} = \underline{11 \text{ min } 34 \text{ s}}$$

Eller - tilstrekkelig nøyaktig i praksis - *Tevannet koker om 12 minutter.*

Hva er resistansen R ?

$$P = U^2/R \Rightarrow R = U^2/P = (230 \text{ V})^2/(1.5 \cdot 10^3 \text{ W}) \stackrel{1\text{W} \equiv 1\text{VA}}{=} 35.3 \text{ V/A} \equiv \underline{35.3 \Omega}$$

Hvis spenningen forandres, forandres effekten som spenningen i kvadrat, og tiden omvendt proporsjonal med spenningen i kvadrat:

$$U \rightarrow 220 \text{ V} \Rightarrow P \rightarrow P \cdot (220/230)^2 \quad \text{og} \quad t \rightarrow t \cdot (230/220)^2 = 1.093 t$$

Det tar ca. ett minutt lengre tid å varme opp vannet. ($\Delta t = 0.093 t = 1.08 \text{ min}$)

Oppgave 4.

Varmebalanse-regnskap: 'Det isen opptar = det vannet avgir':

$$m_{\text{is}} (C_{\text{is}} \cdot (T_0 - T_{\text{is}}) + L_{\text{is}} + C_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (T_2 - T_0)) = m_{\text{vann}} C_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (T_1 - T_2)$$

hvor $T_0 = 0^\circ\text{C}$ og $m_{\text{vann}} = \rho_{\text{vann}} V = 0.25 \text{ kg}$.

$$\underline{m_{\text{is}}} = m_{\text{vann}} \frac{C_{\text{H}_2\text{O}} (T_1 - T_2)}{C_{\text{is}} (T_0 - T_{\text{is}}) + L_{\text{is}} + C_{\text{H}_2\text{O}} (T_2 - T_0)} = 0.27 m_{\text{vann}} = \underline{0.068 \text{ kg}}$$