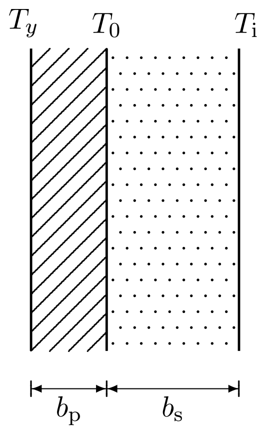
Institutt for fysikk, NTNU
TFY4106 Fysikk for MTBYGG, MTING høsten 2013.

Løsning øving 10.

Oppgave 1.



$b_\mathrm{p} = 2\,\mathrm{cm}$ panel og $b_\mathrm{s} = 3.5\,\mathrm{cm}$ styropor.
Varmestrøm pr. flateenhet J_Q er

$$\left.\begin{aligned} J_\mathrm{Q} &= \lambda_\mathrm{s}(T_\mathrm{i} - T_0)/b_\mathrm{s} \\ J_\mathrm{Q} &= \lambda_\mathrm{p}(T_0 - T_y)/b_\mathrm{p} \end{aligned}\right\} \text{ og disse to er like}$$

Dermed er

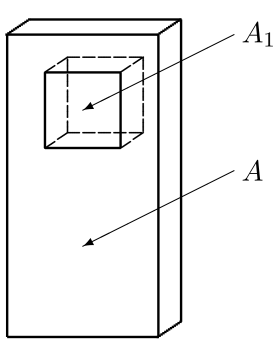
$$\lambda_\mathrm{s}(T_\mathrm{i} - T_0)/b_\mathrm{s} = \lambda_\mathrm{p}(T_0 - T_y)/b_\mathrm{p}$$

som gir

$$T_0 = (T_\mathrm{i} + kT_y)/(1+k)$$
$$\text{hvor } \; k = (\lambda_\mathrm{p}/\lambda_\mathrm{s})(b_\mathrm{s}/b_\mathrm{p})$$

<u>Tallverdi</u>: $k = (0,08/0,010)\cdot(3,5/2) = 14$
$T_0 = (19 - 14\cdot 10)^o\mathrm{C}/15 = \underline{\underline{-8,1^o\mathrm{C}}}$
$J_Q = (0,010/0,035)\cdot(19 - (-8,1))\,\mathrm{W/m^2} = \underline{\underline{7,7\,\mathrm{W/m^2}}}.$

Oppgave 2.



UTEN VINDU:
$\underline{H} \quad = A\cdot\lambda_\mathrm{T}\,(T_\mathrm{i} - T_y)/b_\mathrm{Teff}$

hvor b_Teff er 'effektiv tre-tykkelse'

$= 2\cdot 0.95\,\mathrm{m}^2\cdot 0.12\,(\mathrm{W/m\cdot K})\cdot 28\,\mathrm{K}/0.055\,\mathrm{m}$

$= \underline{\underline{116\,\mathrm{W}}}$

MED VINDU:
$H \quad \to H(1 - A_1/A) + A_1\lambda_G\,(T_\mathrm{i} - T_y)/b_\mathrm{Geff}$

hvor b_Geff er 'effektiv glass-tykkelse'

$= [116\cdot(1 - 0.25/1.90) + 0.25\cdot 0.8\cdot 28/0.124]\,\mathrm{W}$

$= (101 + 45)\,\mathrm{W} = \underline{\underline{146\,\mathrm{W}}}$

\- eller - $\quad 1 + \Delta H/H = 146/116 = \underline{\underline{1.26}}$

Oppgave 3.

Total utstråling $H = A \cdot \sigma T^4$ hvor A er stjerneoverflaten; $A = 4\pi R^2$

$$\Rightarrow \quad \underline{R} \quad = \sqrt{H/4\pi\sigma T^4} = \sqrt{3.9 \cdot 10^{30}\,\mathrm{W}/4\pi \cdot 5.67 \cdot 10^{-8}\,(\mathrm{W/m^2K^4}) \cdot (3000\,\mathrm{K})^4}$$
$$= \underline{2.6 \cdot 10^8\,\mathrm{km}} = \underline{\underline{374\,R_\odot}}$$

Til sammenligning: Avstanden sol-jord er $1.5 \cdot 10^8$ km (og $T_{\mathrm{sol}} = 5780\,\mathrm{K}$).

Oppgave 4.

a) Utstrålt effekt pr. m^2 (intensitet)

$$I_0 = \sigma T_0^4 = 5,67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2K^4}(5,785 \cdot 10^3\,\mathrm{K})^4 = \underline{6,35 \cdot 10^7\,\mathrm{W/m^2}} = \underline{6,35\,\mathrm{kW/cm^2}}.$$

Utstrålt total effekt

$$P_0 = I_0 \cdot A_0 = \pi d^2 I_0.$$

Effekt pr. m^2 som entrer jordatmosfæren

$$I = \frac{P_0}{A} = I_0 \frac{\pi d^2}{4\pi R^2} = I_0 \left(\frac{d}{2R}\right)^2 = 6,35 \cdot 10^7\,\mathrm{W/m^2} \left(\frac{1,392 \cdot 10^6}{2 \cdot 149,6 \cdot 10^6}\right)^2 = \underline{1375\,\mathrm{W/m^2}}.$$

b) Med radius r mottar jorda effekten $P = I \cdot \pi r^2$ (πr^2 er areralet som jorda dekker vertikalt strålegangen, dvs. arealet av en sirkel). Men hele arealet av jordoverflaten stråler ut igjen. Dette arealer er $4\pi r^2$. Midlere utstrålt effekt pr. m^2 er da følgelig gitt ved

$$I_u = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1}{4} I = \sigma T^4$$

slik at midlere temperatur T blir

$$T^4 = \frac{I}{4\sigma}$$

$$T = \left(\frac{I}{4\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{1375}{4 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}}\right)^{1/4}\,\mathrm{K} = \underline{279\,\mathrm{K}} = \underline{6^o\,\mathrm{C}}.$$

Oppgave 5.

a) Frekvensen blir

$$\nu = \frac{kT_0}{h} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \cdot 200\,\mathrm{K}}{6,625 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}} = \underline{4,17 \cdot 10^{12}\,\mathrm{s}^{-1}} \quad (= 4,17 \cdot 10^{12}\,\mathrm{Hz}).$$

Bølgelengden på tilhørende elektromagnetisk stråling blir med dette ($c = \lambda\nu$)

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}}{4,17 \cdot 10^{12}\,\mathrm{s}^{-1}} = \underline{7,20 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}} = \underline{7,20 \cdot 10^{4}\,\mathrm{nm}}.$$

(Til sammenlikning er bølgelengden på synlig lys $\lambda = 400 - 700\,\mathrm{nm}$, der $1\,\mathrm{nm}{=}10^{-9}\,\mathrm{m}$.)

b) Ved derivering kan en benytte kjerneregelen og at $d(1/z)/dz = -1/z^2$. Med det finner en for den spesifikke varmen

$$C = \frac{dU}{dT} = \frac{dU}{dx}\frac{dx}{dT} = kT_0 \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}\left(-\frac{T_0}{T^2}\right) = k\,f(x)$$

der

$$f(x) = \underline{\frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}}.$$

c) Når $x \to 0$ finner en for $f(0)$

$$f(x) = \frac{x^2(1 + x + \cdots)}{(1 + x + \cdots - 1)^2} \to \underline{1}.$$

Dette er klassisk grense i samsvar med ekvipartisjonsprinsippet der $C' = 3\,N_A k = 3R$ for faste stoff (metaller med enkeltatomer i gitterpunktene). For $x \to \infty$ finner en tilsvarende for $f(\infty)$ ($e^x \to \infty$)

$$f(x) \to \frac{x^2 e^x}{e^{2x}} = x^2 e^{-x} \to 0.$$

Dette betyr at $C' = 0$ ved $T = 0$ i samsvar med 3. hovedsetning i termodynamikken.
De øvrige oppgitte verdiene av T innebærer $x = 5$, 2, 1 og 200/(273+20)=0,6826. Dette gir de tilhørende verdiene

$$f(5) = \underline{0,171}, \quad f(2) = \underline{0,724}, \quad f(1) = \underline{0,921}, \quad \text{og} \quad f(0,6826) = \underline{0,962}.$$

[En mer nøyaktig model for faste stoff har en fordeling med tetthet av frekvenser $\sim \nu^2$ ($\sim T_0^2$) fra 0 til en maksimalverdi (Debye-modellen). Integrering over ν medfører energien $U_{tot} \sim T^4$ (+konst) for små T. For elektromagnetiske bølger har en tilsvarende, men uten øvre begrensning på frekvensen. Dette medfører $U_{tot} \sim T^4$ for alle T (Stefan-Boltzmanns lov). Leddet $\frac{1}{2}$ i den oppgitte U må da trekkes fra for å unngå divergent integral.]